Sur la dimension de certaines variétés de Kisin : le cas de la restriction des scalaires de GLd

Charles Savel

ANNÉE 2015

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1
Mention : Mathématiques et applications
École doctorale Matisse

présentée par

Charles Savel

préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
U.F.R. Mathématiques

Sur la dimension de certaines variétés de Kisin : le cas de la restriction des scalaires de GL_d

Thèse soutenue à Rennes le 23 octobre 2015

devant le jury composé de :

Olivier BRINON
Professeur, Université Bordeaux 1 / rapporteur

Ariane MÉZARD
Professeure, Université Pierre et Marie Curie / examinatrice

Sophie MOREL
Professeure, Université de Princeton / examinatrice

Matthieu ROMAGNY
Professeur, Université Rennes 1 / examinateur

Jean-Pierre WINTENBERGER
Professeur, Université de Strasbourg / examinateur

Xavier CARUSO
CR CNRS, Université de Rennes 1 / directeur de thèse

Résumé

À une représentation de p-torsion du groupe de Galois absolu d'un corps p-adique, M. Kisin associe un espace de modules, appelé par la suite variété de Kisin par G. Pappas et M. Rapoport. Ces variétés ont été introduites afin de démontrer plusieurs résultats de modularité sur les représentations galoisiennes. Elles se sont révélées utiles également pour construire certains anneaux de déformations voire les calculer. Plus récemment elles ont été utilisées pour munir le champ des représentations galoisiennes de torsion d'une structure algébrique. Par ailleurs ces variétés ressemblent formellement aux variétés de Deligne-Lusztig affines. En particulier leur définition s'étend dans le cadre de la théorie des groupes réductifs.
Dans cette thèse, nous étudions la dimension de certaines variétés de Kisin dans le cas de la restriction des scalaires à la Weil du groupe linéaire GL_d. En nous basant sur des méthodes issues du cadre Deligne-Lusztig et en suivant les travaux de E. Viehmann et X. Caruso, nous définissons une stratification de la variété de Kisin. Nous encadrons ensuite la dimension des strates, puis étudions le problème de la maximisation de la dimension sur l'ensemble des strates. Cela permet de démontrer des encadrements pour la dimension des variétés de Kisin considérées. Comme dans le cas des variétés de Deligne-Lusztig affines, la somme des racines positives intervient dans l'encadrement de la dimension.

Abstract

Given a p-torsion representation of the absolute Galois group of a p-adic field, M. Kisin defines a moduli space, which was named Kisin variety afterwards by G. Pappas and M. Rapoport. These varieties were first introduced in order to prove several modularity results on Galois representations. They were also used for constructing certain Galois deformation rings and computing some of them. Besides, they were involved in a recent work aiming at defining an algebraic structure on the stack of torsion Galois representations. It turns out that these varieties are formally similar to affine Deligne-Lusztig varieties. In particular their definition extends to the framework of reductive groups.
In this thesis, we study the dimension of some Kisin varieties corresponding to the scalar restriction of the general linear group GL_d. Inspired by methods coming from Deligne-Lusztig theory and following works by E. Viehmann and X. Caruso, we define a stratification on the given Kisin variety. Then we bound from below and from above the dimension of the strata, and we address the problem of maximizing the dimension over all strata. This allows us to derive the announced bounds on the dimension. As for affine Deligne-Lusztig varieties, the sum of the positive roots appears in the bounds.

Remerciements

Je souhaite remercier d'abord Xavier Caruso pour avoir été mon directeur de thèse. L'enthousiasme de Xavier pour les mathématiques, qu'elles soient dans son domaine ou pas, fait plaisir à voir et est communicatif. Il a été disponible, patient, et cela m'a permis de faire cette thèse dans de très bonnes conditions.
Je remercie Olivier Brinon et Michael Rapoport pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Olivier Brinon a eu une relecture très attentive, ce qui m'a permis de corriger beaucoup d'erreurs, et Michael Rapoport m'a suggéré des corrections importantes, qui améliorent la clarté de la thèse.
Je souhaite remercier également Ariane Mézard, Sophie Morel et Jean-Pierre Wintenberger de permettre ma soutenance, en acceptant d'être membres de mon jury de thèse.
Il parait loin le temps des cours à Paris avec Matthieu Romagny. C'est avec lui que j'ai découvert les propriétés universelles et le point de vue fonctoriel. Cela a été marquant pour moi, alors je suis heureux que Matthieu fasse partie de mon jury de thèse, et je l'en remercie.
Le laboratoire de l'IRMAR a été un endroit très agréable pour moi pendant toute la thèse, et s'il peut fonctionner c'est grâce à beaucoup de personnes : je remercie Chantal Halet, Élise Ramos, Carole Wosiak, Morgane Leray, Hélène Rousseaux et Nelly Loton pour l'aide administrative, Marie-Aude Verger pour les discussions dans le bus et le reste, Nicole Iglesia pour les pauses en bas de l'IRMAR, Marie-Annick Paulmier pour l'impression du manuscrit, Olivier Garo et Patrick Pérez pour l'informatique et le tournevis, Maryse Collin, Dominique Hervé et Marie-Annick Guillemer pour la gestion de la bibliothèque, Élodie Cottrel et Anne-Joëlle Chauvin pour les formalités à l'école doctorale. Je remercie Jeannick Bazin, Claudine Hélies et Léone Potony. Sans elles l'IRMAR deviendrait rapidement un sale endroit ! Je remercie toutes les organisatrices et organisateurs du barbecue annuel qui est vraiment un bon moment pour faire connaissance.
Les enseignements aussi font rencontrer du monde : je salue Ludovic Marquis, Florian Ivorra, Ying Hu, Éric Jourdain, Marie-Pierre Lebaud, Yongquan Hu, Fulgence Razafimahéry, Anne Virion, Félix Ulmer, Jizhuang Shih, Max Bauer, Véronique Le Goff pour l'accueil toujours sympathique.
Je fais signe aussi à mes cobureaux : les anciens Damian, Emmanuel. Merci à Fabien pour les discussions, et je pense aussi à Coline et aux balades à Brest ! Et puis maintenant c'est Yvan et Vincent, ça fait de la vie dans le bureau et je les check affectueusement. En plus ils acceptent de s'occuper des muets et c'est utile. Merci à Yvan pour la relecture de ces remerciements.
Parmi les moments les plus agréables à l'IRMAR il y a le repas de midi. Comme un troupeau de gnous les doctorants se dirigent vers le restaurant universitaire, guidés par Arnaud (pour le rassemblement) et Ophélie (pour le respect des horaires). Salut à tous les doctorants passés et présents que j'ai pu croiser, au repas de midi ou ailleurs : Arnaud, Julie, Hélène (H), Hélène (l'autre H), Damien, Pierre-Yves, Renan, Richard, Jean-Phi, Kodjo, Tristan (V), Matthieu (C), Loubna, Néstor, Gabriel, Blandine, Élise, Popov, Romain, Christophe, Alexandre (B), Margot, Alexandre (LM), Türkü, Mohamed, Federico, Florian, Christian, Guillaume, Ophélie, Axel, Camille, Maria, Sandrine, Salomé, Jérémy, Olivier, Thiago, Camille, Benoit, Ana-Maria,

Basile, Coralie, Gwezheneg, Nirina, Quentin, Cyril, Tristan (H) ...
Salut à tous ceux des mots croisés, du Perudo, du tarot ! À Néstor pour les séances sportives de frisbee ! Et merci à Julie et aux participants au groupe de travail sur les corps gras, le Fat Day. Ça permet d'en remettre une bonne couche après le repas au RU.
Une pensée aussi pour toutes les discussions et parfois les engueulades du midi. Merci à ceux du 7ième pour leur accueil et leur thé ! !
Damien et Aurélie, je vous dit à bientôt, que ce soit autour d'un maffé, pour une journée bricolage ou pour un ciné ! Salomé merci pour l'aide en Beamer et bon vent pour la suite !
Il n'y a pas que l'IRMAR et les mathématiques dans la vie, loin de là, et je dis merci aussi aux différents copains et copines qui m'ont aidé à terminer dans les temps, à ceux du footing à n'importe quelle heure, du foot, du volley et du barbecue, à ceux du lycée et du collège pour les bons moments.
Je remercie Léonore pour ce qu'elle m'a apporté, ici j'en dis d'autant moins que j'en pense plus !
Je souhaite finalement remercier ma famille, je pense à Jacotte, Mamette, Gil, Gabi, Emma, Louise, Chonchon, Bruno, Marine, Olivier (oui même toi), Sophie, Bastien, Justine, Paul, Emmanuel, César, Martin, Norma, Benoit, Vincent, Cathoune, Laurent, Gicou.
Je remercie mes frères Romain, Léo et Basile, ces bons gros gars toujours si fins et raffinés et que j'aime tant. Bisous les frérots !
Je remercie mes parents Marc et Pascale. Ils m'ont soutenu à bien des moments dans mes choix. Je les aime et je suis heureux qu'ils soient présents aujourd'hui.
Enfin merci aux petites mains qui ont rendu le pot de thèse possible !

Table des matières

Introduction

Un problème ancien en théorie des nombres est celui de la résolution des équations diophantiennes, ce qui inclut les équations polynomiales à coefficients entiers. Tout au long du 20ème siècle, l'utilisation de méthodes galoisiennes s'est imposée dans ce contexte (et dans bien d'autres). Ainsi une des questions fondamentales de l'arithmétique est la compréhension du groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, où $\overline{\mathbb{Q}}$ est une clôture algébrique du corps des rationnels $\mathbb{Q}$. Ce groupe est muni d'une topologie intéressante obtenue en écrivant $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ comme la limite projective des groupes finis discrets $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ où L parcourt l'ensemble des extensions finies galoisiennes de $\mathbb{Q}$. Une manière d'appréhender $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est de comprendre les représentations linéaires de ce groupe, c'est à dire les morphismes de groupes continus $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_E(V)$ pour V un E-espace vectoriel de dimension finie et E un corps topologique. Ces représentations sont dites galoisiennes. Un problème *a priori* plus simple est d'étudier les représentations galoisiennes p-adiques : si p est un nombre premier, on considère le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, qui contient $\mathbb{Q}$. En fixant une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et une injection $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, on identifie le groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ à un sous-groupe de $G_{\mathbb{Q}}$. Une première approche pour comprendre ρ est de comprendre les restrictions $\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ pour différents nombres premiers p.

La théorie de Hodge p-adique donne des outils pour l'étude des représentations galoisiennes de $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, avec K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, lorsque le corps des coefficients E est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, ou l'anneau des entiers d'une telle extension, ou encore un corps fini de caractéristique p. L'idée fondamentale, due à Fontaine, est d'associer à une telle représentation $\rho : G_K \to GL_E(V)$ un objet d'algèbre (semi-)linéaire qui contient, si possible, toute l'information de la représentation et dans lequel toute référence au groupe G_K a disparu. Cet objet semble plus facile à manipuler que celle-ci, ne serait-ce que parce que les outils de l'algèbre (semi-)linéaire s'appliquent. Donnons une idée du type d'objet considéré par Fontaine : soient k le corps résiduel de K, $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k, $K_0 = \mathrm{Frac}(W)$. On note $\pi \in \mathcal{O}_K$ une uniformisante de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K, $E(u) \in W[u]$ son polynôme minimal sur K_0. On considère l'anneau $\mathfrak{S} = W[\![u]\!]$ que l'on munit de l'endomorphisme ϕ donné par le Frobenius sur W et envoyant u sur u^p. On note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ la complétion p-adique de $\mathfrak{S}[\frac{1}{u}]$, *i.e.*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \left\{ \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s u^s \; ; \; a_s \in W \text{ avec } \lim_{s \to -\infty} a_s = 0 \right\}.$$

On note encore ϕ le prolongement p-adiquement continu de $\phi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Enfin notons K_∞ l'extension de K donnée par $K_\infty = K(\varepsilon_n; n \in \mathbb{N})$ où $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système compatible de racines primitives p^n-ièmes de l'unité, prises dans $\overline{K}$. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est muni d'une action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Alors Fontaine montre dans [Fo2] que la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ des $\mathbb{Z}_p$-modules de type fini munis d'une action linéaire continue de G_K est anti-équivalente à la catégorie des (ϕ, Γ)-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$: un (ϕ, Γ)-module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module de type fini M muni d'une application surjective $\phi_M : M \to M$ ϕ-semi-linéaire et d'une action semi-linéaire de Γ commutant à ϕ_M.

Modules de Kisin

L'étude de représentations p-adiques vérifiant différentes propriétés, par exemple l'étude des représentations cristallines et semi-stables (ces notions ont été dégagées par Fontaine) ont conduit à l'utilisation de différents types de ϕ-modules : on peut citer les (ϕ, Γ)-modules qui ont déjà été évoqués ci-dessus mais aussi les (ϕ, N)-modules filtrés, les modules de Wach et les modules de Breuil–Kisin. Dans la suite on s'intéresse plus particulièrement à ces derniers. Ils ont initialement été introduits par Breuil dans [Br2]. Dans cette note, Breuil propose un nouveau type de module, en espérant une classification des p-groupes finis plats et des groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_K$ qui s'étende à tout p. En effet, si $p > 2$, de telles classifications étaient déjà connues (voir [Fo1], [Con] et [Br1]), mais le cas $p = 2$ restait ouvert. Les modules en jeu sont les suivants : on définit la catégorie $'(Mod/\mathfrak{S})$ comme la catégorie des $\mathfrak{S}$-modules $\mathfrak{M}$ munis d'un endomorphisme ϕ-semi-linéaire, encore noté ϕ, tel que le conoyau du linéarisé $\phi^*(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}$, est annulé par $E(u)$. On définit des sous-catégories pleines $(Mod\ FI/\mathfrak{S})$ et $(Mod/\mathfrak{S})$ de $'(Mod/\mathfrak{S})$. Ce sont des variétés mettant en famille ces modules de Kisin (ou plutôt la version en torsion de ces modules) qui vont nous intéresser dans la suite.

Dans les articles [Ki1] et [Ki2], Kisin construit en partie la classification conjecturée dans [Br2]. Ainsi pour $p > 2$ il obtient une anti-équivalence naturelle entre la catégorie $(Mod/\mathfrak{S})$ et la catégorie des p-groupes finis plats sur $\mathcal{O}_K$ d'ordre une puissance de p. Les modules de Kisin interviennent également dans la description de la catégorie des représentations cristallines de poids de Hodge-Tate négatifs, donnée dans [Ki2].

Une autre application importante des modules de Kisin est donnée dans [Ki1], elle concerne certaines anneaux de déformation de représentations galoisiennes. La démonstration par Wiles du théorème de Fermat a utilisé de manière cruciale une égalité entre un anneau de déformation R et une algèbre de Hecke $\mathbb{T}$. Ainsi pour démontrer des théorèmes de modularité il est important de pouvoir calculer ou étudier des anneaux de déformation. Rappelons rapidement le contexte. On considère encore une extension finie $K/\mathbb{Q}_p$, ainsi qu'une représentation galoisienne (de dimension finie) $G_K \to GL_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}})$ où $\mathbb{F}$ est un corps fini de caractéristique p. Soit A une $W(\mathbb{F})$-algèbre locale finie artinienne de corps résiduel $\mathbb{F}$. Une déformation de $V_{\mathbb{F}}$ à A est un A-module libre fini V_A muni d'une action continue de G_K et d'un isomorphisme G_K-équivariant $V_A \otimes_A \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{F}}$. On définit le foncteur

$$D_{V_{\mathbb{F}}} : A \mapsto \{\text{classes d'isomorphisme des déformations de } V_{\mathbb{F}} \text{ à } A\}.$$

Mazur [Maz] montre que si $V_{\mathbb{F}}$ n'a que des endomorphismes triviaux, alors le foncteur $D_{V_{\mathbb{F}}}$ est pro-représentable par une $W(\mathbb{F})$-algèbre locale complète $R_{V_{\mathbb{F}}}$ de corps résiduel $\mathbb{F}$, *i.e.* pour toute $W(\mathbb{F})$-algèbre A comme ci-dessus on a $D_{V_{\mathbb{F}}}(A) \cong \mathrm{Hom}_{W(\mathbb{F})\text{-alg}}(R_{V_{\mathbb{F}}}, A)$ fonctoriellement en A.

En rajoutant des conditions sur les représentations V_A qui relèvent $V_{\mathbb{F}}$, on s'attend à découper des sous-schémas de $\mathrm{Spec}(R_{V_{\mathbb{F}}})$. Par exemple, on peut se limiter aux déformations provenant d'un schéma en groupes fini plat sur $\mathcal{O}_K$: en notant $D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ l'ensemble des (classes d'isomorphisme de) déformations V_A telles qu'il existe un schéma en groupes fini plat $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{O}_K$, muni d'une action de A, et un isomorphisme de $A[G_K]$-modules $V_A \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(\overline{K})$, Ramakrishna [Ram] démontre que, pour $p > 2$, il existe un quotient $R^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ de $R_{V_{\mathbb{F}}}$ qui pro-représente $D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$.

On s'attend en général à ce que les anneaux $R^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ soient « compliqués ». Une des raisons est la condition « V_A provient d'un schéma en groupes » sur les déformations : elle fait intervenir l'existence d'un objet, qui n'est pas unique en général. Comme annoncé plus haut, les modules de Kisin sont utiles dans ce contexte. Ils permettent de définir une variété $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ qui paramètre les schémas en groupes qui redonnent $V_{\mathbb{F}}$, comme le montre Kisin dans [Ki1]. Pappas et Rapoport ont donné le nom de variété de Kisin à cet objet dans [PaR]. Cette variété est la fibre spéciale d'un $R^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$-schéma projectif $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}} \to \mathrm{Spec}(R^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}})$. Or, Kisin démontre qu'après inversion de p la flèche $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}} \to \mathrm{Spec}(R^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}})$ devient un isomorphisme. Ceci identifie les composantes connexes de $\mathrm{Spec}(R^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}[\frac{1}{p}])$ — que l'on souhaite comprendre — à celles de $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$. Dans certains cas favorables, on peut ensuite relier ces composantes connexes à celles de $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$.

Citons encore les résultats obtenus dans [Ki3] : soient L/K une extension finie et $a \leqslant b$ deux entiers. La mise en famille des modules de Kisin permet de construire un quotient de $R_{V_{\mathbb{F}}}$ dont les points dans les $W(\mathbb{F})[\frac{1}{p}]$-algèbres finies correspondent aux représentations de G_K qui deviennent semi-stables sur L et qui ont des poids de Hodge-Tate compris entre a et b. Les résultats de Kisin sont même plus généraux car il parvient à construire des espaces de déformations qui paramètrent les représentations galoisiennes potentiellement cristallines (resp. semi-stables) ayant un type de Hodge et un type galoisien fixé.

Le lien entre anneaux de déformation et variétés de Kisin correspondantes est mis en avant dans l'article [CDM] de Caruso, David et Mézard. En prenant pour K l'extension non ramifiée de degré 2 de $\mathbb{Q}_p$ et pour des choix particulier d'une représentation $V_{\overline{\mathbb{F}}_p}$, de poids de Hodge-Tate $\mathbf{v}$, d'un déterminant ψ et d'un type galoisien t, ils montrent que les trois cas possibles $R^{\psi}_{V_{\overline{\mathbb{F}}_p}}(\mathbf{v},\mathrm{t}) = 0$, $R^{\psi}_{V_{\overline{\mathbb{F}}_p}}(\mathbf{v},\mathrm{t}) \simeq \mathcal{O}_E[\![X,Y,T]\!]/(XY+p)$ et $R^{\psi}_{V_{\overline{\mathbb{F}}_p}}(\mathbf{v},\mathrm{t}) \simeq \mathcal{O}_E[\![X,Y,T]\!]/(XY+p^2)$ sont discriminés par les variétés de Kisin respectives.

Pour ces raisons il est utile de comprendre les variétés $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$. L'objet de cette thèse est d'étudier la dimension de certaines variétés de Kisin.

Un espace de modules de modèles finis plats

Donnons une définition précise. Un modèle fini plat de $V_{\mathbb{F}}$ est un schéma en groupes fini plat $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{O}_K$, muni d'une action de $\mathbb{F}$ et d'un isomorphisme de $\mathbb{F}[G_K]$-modules $\mathcal{G}(\overline{K}) \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{F}}$. On suppose que $V_{\mathbb{F}}$ admet un modèle fini plat. Alors la variété $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ introduite par Kisin dans [Ki1] est un $\mathbb{F}$-schéma projectif qui vérifie pour toute extension finie $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$,

$$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}') \cong \{\text{modèles finis plats (à isomorphisme près) de } V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'\}.$$

On peut également décrire les points de $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ à l'aide des modules de Kisin. On reprend les notations au-dessus. Fixons un système compatible $(\pi_m)_m = (\sqrt[p^m]{\pi})$ de racines p^m-ièmes de π et posons $K'_\infty = \bigcup_{m\geqslant 0} K(\pi_m)$.
On note $\Phi M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathbb{F}}$ la catégorie des $(\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}) = (k(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F})$-modules finis M munis d'une application ϕ-semi-linéaire $\phi_M : M \to M$ telle que sa linéarisée $\phi^*(M) \to M$ soit un isomorphisme.
Soit $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}}(G_{K'_\infty})$ la catégorie des représentations continues de $G_{K'_\infty}$ sur $\mathbb{F}$. Alors, d'après la théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger [Win], le foncteur

$$T : \Phi M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathbb{F}} \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}}(G_{K'_\infty}), M \longmapsto (k(\!(u)\!)^{sep} \otimes_{k(\!(u)\!)} M)^{\phi=1}$$

est une équivalence de catégories abéliennes.
Soit $M_{\mathbb{F}} \in \Phi M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathbb{F}}$ le ϕ-module correspondant à $V_{\mathbb{F}}(-1)|_{G_{K_\infty}}$, où (-1) est l'inverse du twist

de Tate.
Pour toute extension finie $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$, on a

$$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}') \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{sous-}(k[\![u]\!] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}')\text{-modules finis libres } \mathfrak{M} \text{ de } M_{\mathbb{F}'} = M_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}' \\ \text{tels que } \begin{array}{l} (1)\ \mathfrak{M} \text{ engendre } M_{\mathbb{F}'} \text{ sur } k(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}' \\ (2)\ u^e \mathfrak{M} \subseteq (1 \otimes \phi_{M_{\mathbb{F}'}})(\phi^*(\mathfrak{M})) \subseteq \mathfrak{M} \end{array} \end{array} \right\}$$

où e est l'indice de ramification de l'extension $K/\mathbb{Q}_p$ et $\phi : k(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}' \longrightarrow k(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}'$ envoie $\sum_i a_i u^i \otimes y$ sur $\sum_i a_i^p u^{pi} \otimes y$.

Cette description concrète permet d'aborder l'étude de $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$. Partant de cette description, dans l'article [PaR], Pappas et Rapoport appellent variétés de Kisin une variante des variétés $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$: si H est un groupe algébrique réductif déployé sur k, A est un élément de $G(\mathbb{F}(\!(u)\!))$ avec $G = \mathrm{Res}_{k/\mathbb{F}_p}(H)$ et μ est un copoids dominant de G (on fixe un tore maximal déployé et un sous-groupe de Borel contenant le tore) ils définissent la variété de Kisin $\mathcal{X}_\mu(A)$ associée aux données (H, A, μ) comme la variété algébrique définie sur $\mathbb{F} = k$ dont les $\mathbb{F}'$-points sont

$$\left\{\bar{g} \in H(k(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}')/H(k[\![u]\!] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}') \ ; \ g^{-1} A \phi(g) \in H(k[\![u]\!] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}') u^\mu H(k[\![u]\!] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}')\right\}. \quad (1)$$

En fait il se peut que la variété $\mathcal{X}_\mu(A)$ soit définie sur un corps plus petit que k. Par exemple, si H lui-même est défini sur $\mathbb{F}_p$ (*e.g.* $H = GL_d$), il en est de même de $\mathcal{X}_\mu(A)$. Pappas et Rapoport définissent de manière analogue une variété $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}(A)$.
Lorsque $H = GL_d$ ($d = \dim(V_{\mathbb{F}})$) et A correspond au ϕ-module $M_{\mathbb{F}}$, on retrouve la variété $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ en prenant une réunion de $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}(A)$. Dans la suite on appellera variété de Kisin différentes variantes de celles définies dans [PaR].

On poursuit en évoquant les premiers résultats obtenus par Kisin et Hellmann sur la connexité des variétés $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$. On présentera ensuite les résultats sur la dimension des variétés $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ (ou sur la dimension de variantes ces variétés) obtenus par Imai dans [Im2] dans le cas où la représentation $V_{\mathbb{F}}$ est de dimension 2 et par Caruso dans [Car] lorsque $V_{\mathbb{F}}$ est triviale (de dimension quelconque) et le corps résiduel k est égal à $\mathbb{F}_p$. On évoquera ensuite des conjectures données dans [Car] sur la dimension d'une généralisation des variétés de Kisin. On continuera avec l'exposition des encadrements de dimension obtenus dans la thèse, qui correspondent au cas où $V_{\mathbb{F}}$ est triviale, sans condition ni sur la dimension de $V_{\mathbb{F}}$ ni sur k.

Des résultats sur la connexité en dimension 2

Le problème de la connexité est abordé par Kisin dans [Ki1], dans le cas de la dimension 2. Il définit un sous-schéma fermé $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ de $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ où $\mathbf{v}$ donne une condition de déterminant, et distingue deux composantes (une ordinaire et une non-ordinaire) dans ce sous-schéma fermé. Il conjecture que la composante non-ordinaire est connexe, ce qui est prouvé par Imai dans [Im1], toujours en dimension 2.
Le résultat est amélioré par Hellmann dans [Hel], qui prouve que pour une représentation irréductible $V_{\mathbb{F}}$ de dimension 2 et pour des poids de Hodge-Tate arbitraires, la variété correspondante est toujours géométriquement connexe.

Des résultats partiels sur la dimension

En dimension 2

Imai obtient dans [Im2] dans le cas $\dim_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}}) = 2$ l'encadrement suivant (par des calculs sur des matrices 2×2) : si $n = [k : \mathbb{F}_p]$, on a

$$\text{si } n = 1, \quad 0 \leqslant \dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}) \leqslant \lfloor \frac{e+2}{p+1} \rfloor \tag{2}$$

$$\text{si } n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}) \leqslant \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \lfloor \frac{e}{p+1} \rfloor + \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{e+1}{p+1} \rfloor + \lfloor \frac{e+2}{p+1} \rfloor \tag{3}$$

où e désigne l'indice de ramification de K sur $\mathbb{Q}_p$ et $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière. De plus les encadrements sont optimaux pour toute extension finie $K/\mathbb{Q}_p$.

Pour la représentation triviale et avec le corps résiduel k égal à $\mathbb{F}_p$

Avec des hypothèses différentes, Caruso donne dans [Car] un encadrement de la dimension : on ne suppose plus que $d = \dim_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}})$ vaut 2, mais on demande que la représentation soit triviale, et que le corps résiduel soit $k = \mathbb{F}_p$. Dans ce cas le module $M = M_{\mathbb{F}}$ associé est $\mathbb{F}(\!(u)\!)^d$, et $\phi = \phi_{M_{\mathbb{F}}}$ agit coordonnée par coordonnée *via* ϕ :

$$\begin{array}{rccc} \phi_{M_{\mathbb{F}}}: & \mathbb{F}(\!(u)\!)^d & \longrightarrow & \mathbb{F}(\!(u)\!)^d \\ & (x_i) & \longmapsto & (\phi(x_i)) \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{F}(\!(u)\!) & \longrightarrow & \mathbb{F}(\!(u)\!) \\ & \sum a_i u^i & \longmapsto & \sum a_i u^{pi}. \end{array}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}') &\cong \left\{ \begin{array}{l} \text{sous-}\mathbb{F}'[\![u]\!]\text{-modules finis libres } \mathfrak{M} \text{ de } M \otimes \mathbb{F}' \\ \text{tels que } \begin{array}{l} (1)\ \mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{F}'[\![u]\!]} \mathbb{F}'(\!(u)\!) = M \\ (2)\ u^e \mathfrak{M} \subseteq \phi(\phi^*(\mathfrak{M})) \subseteq \mathfrak{M} \end{array} \end{array} \right\} \\ &\cong \{\text{réseaux } \mathfrak{M} \text{ de } M \text{ tels que } u^e\mathfrak{M} \subseteq \phi(\phi^*(\mathfrak{M})) \subseteq \mathfrak{M}\}. \end{aligned}$$

L'encadrement est alors

$$\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor \lfloor \frac{e-p+2}{p+1} \rfloor \leqslant \dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}) \leqslant \frac{d(d-1)}{2} + \lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor \frac{e}{p+1}. \tag{4}$$

On peut comparer l'encadrement (4) ci-dessus pour $d = 2$ avec l'encadrement (2) établi par Imai : celui-ci montre que son encadrement est optimal, *i.e.* que le minorant et le majorant sont atteints pour certains choix de représentations $V_{\mathbb{F}}$. Cela ne contredit pas l'encadrement (4) puisque celui-ci est établi pour le choix particulier de la représentation triviale.

En fait Caruso s'intéresse plus généralement aux variétés définies comme suit. On remplace ϕ par un morphisme σ plus général, défini comme $\sigma : \mathbb{F}(\!(u)\!) \to \mathbb{F}(\!(u)\!), \sum_i a_i u^i \mapsto \sum_i a_i^{p^h} u^{bi}$ pour $h \geqslant 0$ et $b \geqslant 2$ fixés. On note encore σ le morphisme de $M = \mathbb{F}(\!(u)\!)^d$ dans M agissant coordonées par coordonnées *via* σ.
Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ un d-uplet d'entiers tels que $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_d$. On note $\mathcal{X}_\mu(\mathbb{F}')$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}(\mathbb{F}')$ les ensembles

$$\mathcal{X}_\mu(\mathbb{F}') = \left\{ \begin{array}{c} \text{réseaux } \mathfrak{M} \text{ de } M \otimes \mathbb{F}' \text{ tels que les diviseurs élémentaires} \\ \text{de } \sigma(\sigma^*(\mathfrak{M})) \text{ par rapport à } \mathfrak{M} \text{ soient égaux aux } \mu_i \end{array} \right\}$$

et

$$\mathcal{X}_{\leqslant\mu}(\mathbb{F}') = \left\{ \begin{array}{c} \text{réseaux } \mathfrak{M} \text{ de } M \text{ tels que les diviseurs élémentaires} \\ \mu' \text{ de } \sigma(\sigma^*(\mathfrak{M})) \text{ par rapport à } \mathfrak{M} \text{ vérifient } \mu' \leqslant \mu \end{array} \right\}$$

où si $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_d)$ on note $\mu' \leqslant \mu$ ssi pour tout $s \in [\![1,d]\!]$ on a $\sum_{j=1}^s \mu'_j \leqslant \sum_{j=1}^s \mu_j$ avec égalité pour $s = d$. On montre qu'il existe des sous-schémas réduits $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$ de la grassmannienne affine de $GL_{d,\mathbb{F}}$ dont les $\mathbb{F}'$-points sont ceux prescrits ci-dessus. Ces variétés sont des cas particuliers des variétés de Kisin définies dans [PaR], elles correspondent aux choix $k = \mathbb{F}_p$, $A = I_d$ et $H = GL_d$ dans la définition de l'ensemble donné en (1).

Avec les paramètres $b = p$ et $h = 0$, la variété $\mathscr{GR}_{V_\mathbb{F},0}$ (toujours avec $V_\mathbb{F}$ triviale et $k = \mathbb{F}_p$) est la réunion des sous-schémas fermés $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$ sur les μ vérifiant $0 \leqslant \mu_d \leqslant \mu_1 \leqslant e$.

L'article [Car] donne un encadrement de la dimension des variétés de Kisin $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$, de la façon suivante (la méthode utilisée s'inspire en partie de [Vie] où Viehmann détermine la dimension de certaines variétés de Deligne-Lusztig affines) : on peut stratifier les variétés $\mathcal{X}_\mu$ par des sous-variétés indicées par des données combinatoires. On associe à chaque réseau $\mathfrak{M}$ de M une donnée combinatoire : d fonctions $\varphi_1(\mathfrak{M}) \geqslant \cdots \geqslant \varphi_d(\mathfrak{M})$ de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ affines par morceaux, de dérivée b presque partout et vérifiant des conditions supplémentaires. Les $\varphi_i(\mathfrak{M})$ encodent les diviseurs élémentaires de $\sigma(\sigma^*(\mathfrak{M}))$ par rapport à $\mathfrak{M}$: on a un diagramme commutatif naturel

$$\begin{tikzcd}
 & \{\text{données combinatoires « entières » } (\varphi_i)\} = \Phi_\mathbb{Z} \arrow[d] \\
\{\text{réseaux de } M\} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathbb{Z}^d
\end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale est celle qui à $\mathfrak{M}$ associe les diviseurs élémentaires de $\sigma(\sigma^*(\mathfrak{M}))$ par rapport à $\mathfrak{M}$.
Ainsi en posant $\mathcal{X}_\varphi(\mathbb{F}) = \{\text{réseaux } \mathfrak{M} \text{ de } M \text{ tels que } \varphi(\mathfrak{M}) = \varphi\}$ pour $\varphi \in \Phi_\mathbb{Z}$, on obtient une stratification

$$\mathcal{X}_\mu = \bigcup_{\varphi \text{ au-dessus de } \mu} \mathcal{X}_\varphi.$$

On montre que l'ensemble des données combinatoires Φ est en bijection avec un cône convexe Q de $\mathbb{R}^N$ pour un certain N. Les données combinatoires entières $\Phi_\mathbb{Z}$ correspondent alors à l'intersection de Q avec un réseau de $\mathbb{R}^N$. Notons $\alpha : \Phi \to Q$ la bijection. Il existe une forme linéaire $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^N$ telle que si $\varphi \in \Phi_\mathbb{Z}$, $\dim_\mathbb{F}(\mathcal{X}_\varphi) = \mathcal{L}(\alpha(\varphi))$. On est ainsi ramené à maximiser $\mathcal{L}$ sur (les points entiers de) Q. Le problème de la maximisation est loin d'être trivial, il permet cependant d'établir un encadrement de la dimension de $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$.

On énonce un théorème, découlant directement des théorèmes 1.4 et 1.5 de [Car], afin de pouvoir comparer avec les estimations obtenues dans la thèse. Pour simplifier l'énoncé on ne discrimine pas les cas $h = 0$ et $h > 0$ (c'est le cas $h = 0$ qui est intéressant arithmétiquement). De plus il semble que la condition nécessaire sur b pour que les théorèmes 1.4 et 1.5 de [Car] soient valides est $b \geqslant 1 + \max(d, \lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor)$ et non pas $b \geqslant 1 + \max(d, \lfloor \frac{(d-1)^2}{4} \rfloor)$. Cette condition apparaît pour la première fois dans l'énoncé de la proposition 4.1 de [Car]. Il n'est pas clair que dans la démonstration de cette proposition on puisse prendre $\lfloor \frac{(d-1)^2}{4} \rfloor$ au lieu de $\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor$.

Définition 1. *Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$. On dit que μ est*

(i) b-régulier si $\mu_i - \mu_{i+1} \leqslant b(\mu_{d-i} - \mu_{d+1-i})$ pour $i \in [\![1, d-1]\!]$

(ii) intégralement b-régulier si μ est b-régulier, si les μ_i sont entiers et si $b-1$ divise $\mu_1 + \cdots \mu_d$

(iii) fortement intégralement b-régulier si μ est intégralement b-régulier et si $\mu_{d-1} - \mu_d \leqslant b(\mu_1 - \mu_2) - d(b^2 - 1)$.

Théorème 2. *(Caruso) On suppose $b \geqslant 1 + \max(d, \lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor)$. Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{Z}^d$ avec $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_d$. Alors*

(i) on suppose que $b-1$ divise $\mu_1 + \cdots + \mu_d$. Pour $w \in \mathfrak{S}_d$ on définit

$$\vec{\rho}_w = \vec{\rho} + (b-1).\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^{-n} \cdot \vec{\rho}}{b^n}$$

où $\mathfrak{S}_d$ désigne le groupe des permutations de $\{1, \dots, d\}$ et agit par $w \cdot (y_j)_j = (y_{w^{-1}(j)})_j$ sur $\mathbb{R}^d$. On a

$$\dim(\mathcal{X}_\mu) \leqslant \frac{d(d-1)}{2} + \min_{w \in \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^d$.

De plus il existe des constantes positives c_1 et c_2 ne dépendant que de b et d telles que si $\mu_i \geqslant \mu_{i+1} + c_1$ pour tout $i < d$ alors

$$\dim(\mathcal{X}_\mu) \geqslant -c_2 + \min_{w \in \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle$$

(ii) on a

$$-(d-1)^2 - \frac{(d-2)^2}{4} + \sup_{\substack{\mu' \leqslant \mu \\ \mu' \text{ f.i. } b\text{-rég}}} \frac{\langle 2\vec{\rho} | \mu' \rangle}{b+1} \leqslant \dim(\mathcal{X}_{\leqslant \mu}) \leqslant \frac{d(d-1)}{2} + \sup_{\substack{\mu' \leqslant \mu \\ \mu' \text{ } b\text{-rég}}} \frac{\langle 2\vec{\rho} | \mu' \rangle}{b+1}$$

où $\vec{\rho} = (\frac{d+1}{2} - i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$.

Citons maintenant deux conjectures faites dans [Car].

Une généralisation des variétés de Kisin

Comme pour les variétés de Deligne-Lusztig affines, il est possible d'étendre la définition des variétés de Kisin aux groupes algébriques (affines) G réductifs déployés sur $\mathbb{F}$, le cas au-dessus étant celui où $G = GL_d$. En effet l'ensemble des réseaux de $M = \mathbb{F}((u))^d$ est en bijection avec l'ensemble $GL_d(\mathbb{F}((u)))/GL_d(\mathbb{F}[[u]])$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\mu(\mathbb{F}) &\cong \left\{ \begin{array}{c} \text{réseaux } \mathfrak{M} \text{ de } M \text{ tels que les diviseurs élémen-} \\ \text{taires de } \sigma(\sigma^*(\mathfrak{M})) \text{ par rapport à } \mathfrak{M} \text{ soient les } \mu_i \end{array} \right\} \\ &\cong \left\{ \begin{array}{c} \bar{g} \in GL_d(\mathbb{F}((u)))/GL_d(\mathbb{F}[[u]]) \text{ tels que} \\ g^{-1}\sigma(g) \in GL_d(\mathbb{F}[[u]]).\mathrm{diag}(u^\mu).GL_d(\mathbb{F}[[u]]) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

où $\sigma : GL_d(\mathbb{F}((u))) \to GL_d(\mathbb{F}((u)))$ est le morphisme induit par $\sigma : \mathbb{F}((u)) \to \mathbb{F}((u))$ et $\mathrm{diag}(u^\mu)$ est la matrice diagonale d'éléments diagonaux $u^{\mu_1}, \dots, u^{\mu_d}$. Il s'agit alors de remplacer le groupe GL_d intervenant dans cette situation par un groupe réductif déployé quelconque.

Soient G un groupe algébrique affine réductif déployé sur $\mathbb{F}$ et T un tore maximal déployé de G. On note $X^*(T)$ le groupe des caractères de T, $X_*(T)$ le groupe des cocaractères. On fixe une chambre de Weyl C dans $X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, et pour $\lambda \in X_*(T)$, on note u^λ l'image de $u \in \mathbb{G}_m(\mathbb{F}((u)))$ par λ. Dans ce contexte on a la décomposition de Cartan (voir [Gör] par exemple)

$$G(\mathbb{F}((u))) = \bigcup_{\mu \text{ copoids dominant}} G(\mathbb{F}[[u]]).u^\mu.G(\mathbb{F}[[u]])$$

qui généralise la notion de diviseur élémentaire d'une matrice de $GL_d(\mathbb{F}((u)))$.

On considère le morphisme $\sigma : \mathbb{F}((u)) \to \mathbb{F}((u)), \sum a_i u^i \mapsto \sum a_i u^{bi}$. Puisqu'on a pris $h = 0$, σ est un morphisme de $\mathbb{F}$-algèbres et induit un morphisme de groupes de $G(\mathbb{F}((u)))$ dans lui-même, encore noté σ. Si $\mu \in X_*(T)$ est un copoids dominant et $A \in G(\mathbb{F}((u)))$, on définit $\mathcal{X}_\mu^G(A)$ comme le sous-schéma réduit de la grassmannienne affine de G sur $\mathbb{F}$ dont les $\mathbb{F}'$-points sont

$$\left\{\bar{g} \in G(\mathbb{F}'((u)))/G(\mathbb{F}'[\![u]\!]) \ ; \ g^{-1}A\sigma(g) \in G(\mathbb{F}'[\![u]\!]).u^\mu.G(\mathbb{F}'[\![u]\!])\right\}. \tag{5}$$

On définit de manière analogue une varitété $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}^G(A)$ dont l'ensemble des $\mathbb{F}'$-points est

$$\left\{\bar{g} \in G(\mathbb{F}'((u)))/G(\mathbb{F}'[\![u]\!]) \ ; \ g^{-1}A\sigma(g) \in G(\mathbb{F}'[\![u]\!]).u^{\mu'}.G(\mathbb{F}'[\![u]\!]) \text{ avec } \mu' \leqslant \mu\right\}. \tag{6}$$

Le cas traité dans [Car] correspond donc à $G = GL_d$ et $A = I_d$ (c'est l'hypothèse $V_\mathbb{F}$ triviale qui correspond à $A = I_d$). Les variétés introduites en (5) et (6) sont des variantes de celles introduites en (1) pour $G = \mathrm{Res}_{k/\mathbb{F}_p}(H)$. Il est à noter toutefois qu'elles diffèrent des variétés de Kisin étudiées par Pappas et Rapoport car ces deux derniers auteurs considèrent un morphisme ϕ qui agit de manière non triviale sur le corps k. Une solution possible pour prendre en compte cette action dans le cadre de Caruso serait de twister l'action de σ sur $G(\mathbb{F}((u)))$ par un automorphisme de G. Toutefois, les conjectures 3 et 4 énoncées ci-après ne seraient plus valables dans cette généralité.

On s'attend à obtenir des encadrements des dimensions de $\dim_\mathbb{F}(\mathcal{X}_\mu^G(A))$ et $\dim_\mathbb{F}(\mathcal{X}_{\leqslant\mu}^G(A))$ faisant intervenir le système de racines de GL_d et, plus précisément, la demi-somme $\vec{\rho}$ des racines positives (pour la base choisie) et le groupe de Weyl W du système des racines de (G, T) :

Conjecture 3. *(Caruso) Pour $w \in W$ on définit*

$$\vec{\rho}_w = \vec{\rho} + (b-1).\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^{-n} \cdot \vec{\rho}}{b^n}.$$

Il existe des constantes $b_0 \geqslant 2$ et c_0 telles que pour tout $b \geqslant b_0$, pour tout copoids dominant μ,

$$\dim(\mathcal{X}_\mu^G(A)) \leqslant c_0 + \min_{w\in W} \langle\vec{\rho}_w|\mu\rangle.$$

Pour énoncer la conjecture concernant la dimension de $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}^G(A)$ on a besoin de la définition suivante : on dit qu'un élément $\mu \in X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ est b-régulier si le minimum des produits scalaires $\langle\vec{\rho}_w|\mu\rangle$ est atteint lorsque w est le mot le plus long du groupe de Weil W (voir [Bo2] pour des rappels sur le groupe de Weil), noté w_0. On note *Reg* le cône convexe formés des éléments b-réguliers. Étant le mot le plus long, w_0 échange les racines positives et négatives du système de racines, ainsi on a $w_0 \cdot \vec{\rho} = -\vec{\rho}$ ce qui donne $\vec{\rho}_{w_0} = \frac{2}{b+1}\vec{\rho}$.

Conjecture 4. *(Caruso) Il existe des constantes c_1 et c_2 et $\mu_0 \in X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ tels que pour tout copoids dominant μ,*

$$-c_2 + \sup_{\mu'\leqslant\mu,\ \mu'-\mu_0\in Reg} \frac{2}{b+1}\langle\vec{\rho}|\mu'\rangle \leqslant \dim(\mathcal{X}_{\leqslant\mu}^G(A)) \leqslant c_1 + \sup_{\mu'\leqslant\mu,\ \mu'\in Reg} \frac{2}{b+1}\langle\vec{\rho}|\mu'\rangle$$

où dans les bornes supérieures les μ' parcourent l'ensemble des copoids réels.

Les bornes des conjectures 3 et 4 font ainsi intervenir le système de racines du groupe G en jeu. Dans cette thèse, on prendra pour G la restriction des scalaires de GL_d. On s'attend donc à ce que le groupe de Weil de la restriction apparaisse dans les estimations sur la dimension.

Les résultats de la thèse

Comme annoncé plus haut les résultats de la thèse portent sur les variétés de Kisin correspondant au choix d'une représentation $V_{\mathbb{F}}$ triviale mais sans restriction ni sur $d = \dim V_{\mathbb{F}}$ ni sur le corps résiduel k. Ce cas est la généralisation naturelle de celui traité dans [Car], il consiste à prendre $G = (\mathrm{Res}_{k/\mathbb{F}_p}(GL_{d,k}))_{\mathbb{F}}$, $A = I_d$ dans les définitions (5) et (6) et à rajouter un twist par un Frobenius. C'est aussi le cas qui avait initialement été considéré par Kisin dans [Ki1]. Dans le contexte de [PaR] et (1) cela correspond à prendre $A = I_d$, $H = GL_d$ et $\mathbb{F}$ contenant k.

On se place dans la situation suivante : on suppose qu'il existe un plongement de k dans $\mathbb{F}$. Soit $d \geqslant 1$, on pose

$$G = (\mathrm{Res}_{k/\mathbb{F}_p}(GL_{d,k}))_{\mathbb{F}}$$

où $\mathrm{Res}_{k/\mathbb{F}_p}(GL_{d,k})$ est la restriction des scalaires à la Weil de $GL_{d,k}$. Le groupe G est un produit de GL_d : on a l'isomorphisme

$$G \cong \prod_{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(k,\mathbb{F})} GL_{d,\mathbb{F}}$$

provenant du fait que si R est une $\mathbb{F}$-algèbre, on a un isomorphisme

$$k \otimes_{\mathbb{F}_p} R \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(k,\mathbb{F})} R, \; x \otimes r \longmapsto (\alpha(x).r)_\alpha.$$

On note $S = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(k, \mathbb{F})$ l'ensemble des plongements. On fixe $h' \in \mathbb{N}$, et on définit F comme le Frobenius $\mathbb{F} \to \mathbb{F}, x \mapsto x^{p^{h'}}$. On fixe également $h, b \in \mathbb{N}$ avec $b \geqslant 2$, et on note à nouveau

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{F}(\!(u)\!) & \longrightarrow & \mathbb{F}(\!(u)\!) \\ & \sum_{i \gg -\infty} a_i.u^i & \longmapsto & \sum_{i \gg -\infty} a_i^{p^h}.u^{bi} \end{array}.$$

On note encore $\sigma : \mathbb{F}(\!(u)\!)^d \to \mathbb{F}(\!(u)\!)^d, (x_i)_i \mapsto (\sigma(x_i))_i$ l'application agissant coordonnées par coordonnées sur $M = \mathbb{F}(\!(u)\!)^d$, ainsi que le morphisme de groupe $\sigma : G(\mathbb{F}(\!(u)\!)) \to G(\mathbb{F}(\!(u)\!))$ qui envoie $(g^\alpha)_{\alpha \in S}$ sur $(\sigma(g^{F^{-1}\circ\alpha}))_{\alpha \in S}$ où σ agit coefficient par coefficient sur les matrices g^α.

À nouveau, c'est le cas $h = 0$ qui est intéressant arithmétiquement. En effet l'isomorphisme $k(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F} \cong \prod_{\alpha \in S} \mathbb{F}(\!(u)\!)$ transforme

$$\phi : k(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F} \to k(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}, \sum_i a_i u^i \otimes y \mapsto \sum_i a_i^p u^{pi} \otimes y$$

en

$$\sigma : \prod_{\alpha \in S} \mathbb{F}(\!(u)\!) \to \prod_{\alpha \in S} \mathbb{F}(\!(u)\!), \left(\sum_i a_i^\alpha u^i\right)_{\alpha \in S} \mapsto \left(\sum_i (a_i^{F\circ\alpha})^{p^h} u^{bi}\right)_{\alpha \in S}$$

avec $h = 0$, $b = p$ et $h' = 1$. Cela explique également pourquoi le twist par le Frobenius F apparaît naturellement. On obtient alors les identifications, pour la représentation triviale $V_{\mathbb{F}}$ de dimension d,

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}') & \cong & \left\{ \begin{array}{l} \text{sous-}(k[\![u]\!] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}')\text{-modules finis libres } \mathfrak{M} \text{ de } M_{\mathbb{F}'} = M_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}' \\ \text{tels que } \begin{array}{l} (1)\ \mathfrak{M} \text{ engendre } M_{\mathbb{F}'} \text{ sur } k(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}' \\ (2)\ u^e\mathfrak{M} \subseteq (1 \otimes \phi_{M_{\mathbb{F}'}})(\phi^*(\mathfrak{M})) \subseteq \mathfrak{M} \end{array} \end{array} \right\} \\ & \cong & \left\{ \begin{array}{l} \text{familles } (\mathfrak{M}^\alpha)_{\alpha \in S} \text{ de sous-}\mathbb{F}'[\![u]\!]\text{-modules libres de } \mathbb{F}'(\!(u)\!)^d \text{ telles} \\ \text{que pour tout } \alpha \in S, \begin{array}{l} (1)\ \mathfrak{M}^\alpha \text{ engendre } \mathbb{F}'(\!(u)\!)^d \text{ sur } \mathbb{F}'(\!(u)\!) \\ (2)\ u^e\mathfrak{M}^\alpha \subseteq (1 \otimes \sigma)(\sigma^*(\mathfrak{M}^{F\circ\alpha})) \subseteq \mathfrak{M}^\alpha \end{array} \end{array} \right\}. \end{array}$$

Cette identification explique aussi le choix de prendre pour G la restriction des scalaires de GL_d : se donner une famille de réseaux $(\mathfrak{M}^\alpha)_\alpha$ revient à se donner un élément $g\cdot G(\mathbb{F}'[\![u]\!])$ de $G(\mathbb{F}'(\!(u)\!))/G(\mathbb{F}'[\![u]\!])$.

Le groupe G choisi étant un produit du groupe linéaire général, on choisit pour tore maximal de G le tore T produit du tore maximal standard de $GL_{d,\mathbb{F}}$. Le système de racines de G est alors la réunion disjointe de $\#S$ copies du système de racine standard de GL_d. Ainsi pour base du système de racines de G on prend la réunion des bases standard. Dans ce contexte un copoids $\mu = (\mu_j^\alpha) \in \mathbb{Z}^{S\times[\![1,d]\!]}$ est dominant ssi pour tout $\alpha \in S$ on a $\mu_1^\alpha \geqslant \cdots \geqslant \mu_d^\alpha$. La relation d'ordre induite par le choix de la base est donnée par $\mu' \leqslant \mu$ ssi pour tout $\alpha \in S$, pour tout $s \in [\![1,d]\!]$ on a $\sum_{j=1}^s \mu_j'^\alpha \leqslant \sum_{j=1}^s \mu_j^\alpha$ avec égalité si $s = d$. Le groupe de Weil obtenu est le produit $W = \prod_{\alpha\in S}\mathfrak{S}_d$. La demi-somme $\vec{\rho}$ des racines positives est $(\frac{d+1}{2} - j)_{\alpha,j}$.

Soit σ_0 l'automorphisme de groupe de $W = \prod_{\alpha\in S}\mathfrak{S}_d$ envoyant $(w_\alpha)_\alpha$ sur $(w_{F^{-1}\circ\alpha})_\alpha$.
Le groupe de Weil agit sur $\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$ par $(w_\alpha)_\alpha \cdot (y_j^\alpha)_{\alpha,j} = \left(y^\alpha_{w_\alpha^{-1}(j)}\right)_{\alpha,j}$ et pour un élément w de W on note

$$\vec{\rho}_w = \vec{\rho} + (b-1).\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sigma_0^k\left(w^{-1}\right)\right)\cdot\vec{\rho}}{b^n}.$$

Cette définition est à comparer avec celle de la conjecture 3. Le morphisme σ que l'on considère maintenant permute les composantes indexées par les $\alpha \in S$, ce qui explique l'apparition de l'action de σ_0 dans la définition des $\vec{\rho}_w$.

On considère pour μ un copoids dominant la variété réduite $\mathcal{X}_\mu$ dont les $\mathbb{F}'$-points sont donnés par

$$\begin{aligned} &\left\{(\overline{g^\alpha}) \in \prod_{\alpha\in S} GL_d(\mathbb{F}'(\!(u)\!))/GL_d(\mathbb{F}'[\![u]\!]) \ ; \ \forall\alpha\in S, \operatorname{div}\left((g^\alpha)^{-1}\sigma(g^{F^{-1}\circ\alpha})\right) = \mu^\alpha\right\} && (7)\\ = \ &\left\{(L^\alpha)_{\alpha\in S} \ ; \ \forall\alpha, L^\alpha \text{ est un réseau de } M_{\mathbb{F}'} \text{ et } \operatorname{div}\left(\sigma(\sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha}))/L^\alpha\right) = \mu^\alpha\right\} && (8)\end{aligned}$$

et la variété réduite $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$ dont les $\mathbb{F}'$-points sont donnés par

$$\begin{aligned} &\left\{(\overline{g^\alpha}) \in \prod_{\alpha\in S} GL_d(\mathbb{F}'(\!(u)\!))/GL_d(\mathbb{F}'[\![u]\!]) \ ; \ \forall\alpha\in S, \operatorname{div}\left((g^\alpha)^{-1}\sigma(g^{F^{-1}\circ\alpha})\right) \leqslant \mu^\alpha\right\} && (9)\\ = \ &\left\{(L^\alpha)_{\alpha\in S} \ ; \ \forall\alpha, L^\alpha \text{ est un réseau de } M_{\mathbb{F}'} \text{ et } \operatorname{div}\left(\sigma(\sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha}))/L^\alpha\right) \leqslant \mu^\alpha\right\} && (10)\end{aligned}$$

où pour deux réseaux L_1 et L_2 de M on note $\operatorname{div}(L_1/L_2)$ les diviseurs élémentaires de L_1 par rapport à L_2, et où $M_{\mathbb{F}'} = \mathbb{F}'(\!(u)\!)^d$.

En adaptant la méthode de [Car], on obtient les théorèmes suivants (voir 4.4.5 et 4.5.2) :

Théorème 5. *Soit $\mu = (\mu_j^\alpha) \in (\mathbb{Z}^d)^S$ dominant. On note alors $|\mu^\alpha| = \sum_{j=1}^d \mu_j^\alpha$.*
Soit (N) la condition : pour tout $\alpha \in S$, si r est le cardinal de l'orbite de α sous l'action de F, alors

$$(b^r - 1)\left|\left(\sum_{k=0}^{r-1} b^k.|\mu^{F^{-k}\circ\alpha}|\right)\right. .$$

Si μ ne satisfait pas la condition (N), la variété $\mathcal{X}_\mu$ est vide. Dans la suite du théorème on suppose (N) vérifiée.

On suppose également $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d+1)$.
Alors

(i) *il existe des constantes* $c_1 \in \mathbb{R}_+$ *et* $c_2 \in \mathbb{R}$ *(dépendantes uniquement de* d *et* b*) telles que si* μ *vérifie* $\mu_j^\alpha \geqslant \mu_{j+1}^\alpha + c_1$ *pour tous* $\alpha \in S$ *et* $j \in [\![1, d-1]\!]$,

$$\min_{w \in \prod_{\alpha \in S} \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle - \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2} - c_2 \leqslant \dim(\mathcal{X}_\mu).$$

(ii) *on a*

$$\dim(\mathcal{X}_\mu) \leqslant \min_{w \in \prod_{\alpha \in S} \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}.$$

De plus si μ *est* b*-régulier on a*

$$\min_{w \in \prod_{\alpha \in S} \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle = \langle \vec{\rho}_{w_0} | \mu \rangle = \frac{2}{b+1} \langle \vec{\rho} | \mu \rangle$$

où $\vec{\rho}$ *est la demi-somme des racines positives de la restriction des scalaires (voir la définition 4.2.4).*

Concernant les variétés $\mathcal{X}_{\leqslant \mu}$ on a :

Théorème 6. *Soit* $\mu = (\mu_j^\alpha) \in (\mathbb{Z}^d)^S$ *dominant.*
On suppose $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d+1)$. *Alors*

$$\dim(\mathcal{X}_{\leqslant \mu}) \leqslant \frac{2}{b+1} \langle \vec{\rho} | \mu \rangle + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}.$$

On compare maintenant les résultats obtenus avec ceux de [Im2] et [Car].

Comparaison avec les encadrements d'Imai et de Caruso

La situation étudiée dans [Im2] correspond aux paramètres $d = 2$, $h' = [k : \mathbb{F}_p] - 1$, $h = 0$ et $b = p$. Si on pose $m = [k : \mathbb{F}_p]$, Imai considère la variété $\mathcal{GR}_{V_\mathbb{F},0}$ dont l'ensemble des $\mathbb{F}$-points est l'ensemble des collections $(L^\alpha)_{\alpha \in S}$ de réseaux de $\mathbb{F}(\!(u)\!)^2$ telles que pour tout $\alpha \in S$ les diviseurs élémentaires $(\mu_1^\alpha, \mu_2^\alpha)$ de $\phi(\phi^*(L^{F^{-1} \circ \alpha}))$ par rapport à L^α vérifient $0 \leqslant \mu_2^\alpha \leqslant \mu_1^\alpha \leqslant e$. Il montre alors que

$$0 \leqslant \dim(\mathcal{GR}_{V_\mathbb{F},0}) \leqslant \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor \lfloor \frac{e}{p+1} \rfloor + \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{e+1}{p+1} \rfloor + \lfloor \frac{e+2}{p+1} \rfloor. \tag{11}$$

Or, lorsque $V_\mathbb{F}$ est triviale, la variété $\mathcal{GR}_{V_\mathbb{F},0}$ est la réunion des $\mathcal{X}_{\leqslant \mu}$ sur les copoids dominants $\mu = (\mu_1^\alpha, \mu_2^\alpha)_{\alpha \in S}$ vérifiant $0 \leqslant \mu_2^\alpha \leqslant \mu_1^\alpha \leqslant e$ pour tout $\alpha \in S$, donc sa dimension est inférieure ou égale au sup des dimensions des variétés $\mathcal{X}_{\leqslant \mu}$ mises en jeu. Pour un μ comme au-dessus le théorème 6 implique si $p \geqslant 3$ la majoration

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{X}_{\leqslant \mu}) &\leqslant \frac{2}{p+1} \langle \vec{\rho} | \mu \rangle + \#S \cdot \frac{2(2-1)}{2} \\
&= \frac{1}{p+1} \sum_{\alpha \in S} (\mu_1^\alpha - \mu_2^\alpha) + m \\
&\leqslant \frac{1}{p+1} \sum_{\alpha \in S} e + m \\
&= \frac{me}{p+1} + m
\end{aligned}$$

donc $\dim(\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}) \leqslant \frac{me}{p+1}+m$.
Le majorant dans (11) est inférieur ou égal à

$$\left(\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor+\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor+1\right)\frac{e}{p+1}+\left(\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor+2\right)\frac{1}{p+1} \tag{12}$$

$$\leqslant \frac{me}{p+1}+\frac{m}{p+1}. \tag{13}$$

On obtient deux majorations faisant apparaître le même coefficient $\frac{m}{p+1}$ dans la partie linéaire en l'indice de ramification e.

La situation considérée dans [Car] correspond elle aux paramètres $h'=0$ et $k=\mathbb{F}_p$ (donc $\#S=1$). Dans ce cas, le théorème 5 démontré dans la thèse redonne le point (i) du théorème 2 démontré par Caruso (et les vecteurs $\vec{\rho}_w$ en jeu sont bien les mêmes), à la seule différence près que pour la minoration, Caruso obtient un meilleur minorant : les constantes c_2 sont les mêmes dans les deux théorèmes, mais le terme $-\frac{d(d-1)}{2}$ est ajouté dans le théorème 5. Il est cependant possible que les mêmes méthodes que celles utilisées dans la thèse permettent, par des estimations plus astucieuses, de supprimer ce terme dans la minoration.
Concernant la partie (ii) du théorème 2, on démontre dans la thèse une majoration moins précise. Plus grave, nous n'avons pas réussi à établir une minoration de la dimension des variétés $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$, faute d'avoir pu définir un analogue de la notion de d-uplet fortement intégralement b-régulier comme dans la définition 1. On renvoie à la remarque 4.5.3 pour plus de précision.

On présente maintenant le plan de la thèse.

Le plan de la thèse

Comme mentionné précédemment, la méthode utilisée est celle de [Car], elle-même inspirée en partie de [Vie].

Ce travail est divisé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre on fait des rappels sur la définition des grassmanniennes affines et leur topologie afin de montrer que la variété $\mathcal{X}_\mu$ (respectivement $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$) est définie par une condition localement fermée (respectivement par une condition fermée) dans un produit de grassmanniennes affines pour le groupe GL_d.

Dans le deuxième chapitre on associe une donnée combinatoire $\tilde{\varphi}(L)$ aux collections $L=(L^\alpha)_\alpha$ de réseaux de M. Elle consiste en la donnée pour chaque $\alpha\in S$ d'un d-uplet de fonctions $(\tilde{\varphi}_1^\alpha(L),\dots,\tilde{\varphi}_d^\alpha(L))$ affines par morceaux croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et vérifiant des conditions de rigidité. On définit un réordonnement $\varphi(L)$ des fonctions $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$. Un exemple de telle donnée combinatoire est dessiné dans la figure 2.1. Les données combinatoires $\tilde{\varphi}(L)$ et $\varphi(L)$ d'une collection L encodent les diviseurs élémentaires $\operatorname{div}(\sigma(\sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha}))/L^\alpha)$ pour les diférents $\alpha\in S$. Notons que les composantes en α de $\varphi(L)$ ne sont pas indépendantes, elles sont entrelacées par le choix de σ : ainsi le cas étudié n'est pas un simple produit direct du cas $G=GL_d$.
On montre alors que si $\tilde{\varphi}$ est une donnée combinatoire « entière » la condition $\tilde{\varphi}(L)=\tilde{\varphi}$ découpe une sous-variété $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ de $\mathcal{X}_\mu$. On obtient ainsi une stratification

$$\mathcal{X}_\mu=\bigcup_{\tilde{\varphi}\in\tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}},\ \mu(\tilde{\varphi})=\mu}\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$$

ce qui ramène la détermination de la dimension de $\mathcal{X}_\mu$ à la détermination de la dimension des $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$. On définit $\mathcal{X}_\varphi$ comme la réunion disjointe des $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ pour $\tilde{\varphi}$ donnant φ après réordonnement. On obtient $\dim(\mathcal{X}_\mu)=\sup_{\varphi\in\Phi_{\mathbb{Z}},\ \mu(\varphi)=\mu}\dim(\mathcal{X}_\varphi)$. On a une formule analogue pour la

dimension de la variété $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$.
La seconde partie du chapitre est consacrée à l'évaluation du nombre $\dim(\mathcal{X}_\varphi)$. On montre qu'il existe une fonction dimension naturelle sur l'ensemble des données combinatoires Φ telle que $|\dim(\mathcal{X}_\varphi) - \dim(\varphi)| \leqslant (\#S)\cdot\frac{d(d-1)}{2}$ pour tout $\varphi\in\Phi$.

Dans le troisième chapitre, on explique comment le calcul de la borne supérieure

$$\sup_{\varphi\in\Phi_{\mathbb{Z}},\ \mu(\varphi)=\mu} \dim(\mathcal{X}_\varphi)$$

se ramène à un problème d'optimisation linéaire. Pour ce faire, on paramétre les donnés combinatoires sus-mentionnées par une famille de réels indexée par $S\times I$ où $I=\{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d\}$ en établissant une bijection de Φ sur un cône convexe Q de $\mathbb{R}^{S\times I}=\{(q^\alpha_{i,j})\}$. L'ensemble des données combinatoires $\Phi_{\mathbb{Z}}$ correspond alors à l'intersection de Q avec un réseau R de $\mathbb{R}^{S\times I}$.
On vérifie que *via* la bijection de Φ sur Q la fonction $\dim(\varphi)$ est une forme linéaire l, comme l'est la fonction g qui à une donnée combinatoire φ associe les « diviseurs élémentaires » μ^α_j (on entend par là que g est une fonction linéaire de $\mathbb{R}^{S\times I}$ dans $\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$ qui sur un élément de Φ provenant d'une collection $L=(L^\alpha)_\alpha$ de réseaux vaut $(\mathrm{div}(\sigma(\sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha}))/L^\alpha))_\alpha)$.
Ainsi on est ramené à évaluer une borne supérieure de la forme $\sup_{x\in Q\cap R,\ g(x)=\mu} l(x)$. La fin du chapitre donne des outils d'optimisation linéaire pour cela.

Dans le quatrième et dernier chapitre on démontre les encadrements annoncés sur la dimension des variétés $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$. On dualise le problème d'optimisation, ce qui amène à calculer un convexe $A_{Q,g,l}$ attaché à Q. Le cône convexe Q, compliqué, peut être approximé par des cônes $Q_{min}\subseteq Q\subseteq Q_{max}$ plus simples. Un fait remarquable obtenu dans [Car] pour $G=GL_d$ est que les points extrémaux de $A_{Q_{max},g,l}$ sont en bijection naturelle avec le groupe de Weil de GL_d. Dans la situation considérée c'est encore le cas : les points extrémaux du convexe $A_{Q_{max},g,l}$ sont en bijection avec le groupe de Weil $\prod_{\alpha\in S}\mathfrak{S}_d$ de G.
On calcule alors le convexe $A_{Q,g,l}$ comme dans *loc. cit.* en utilisant la notion de permutation des perdants. Ceci permet d'obtenir les théorèmes 4.4.5 et 4.5.2.

Perspectives

On aimerait donner un encadrement de la dimension de $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ dans le cas général, c'est à dire lorsque $V_{\mathbb{F}}$ n'est plus supposée triviale. Cela revient à définir des variétés comme en (7) et (9), mais en prenant un morphisme σ plus général : on choisit pour $\alpha\in S$ des matrices $A^\alpha\in GL_d(\mathbb{F}'(\!(u)\!))$ et on considère les variétés dont les $\mathbb{F}'$-points sont

$$\left\{(\overline{g^\alpha})\in\prod_{\alpha\in S} GL_d(\mathbb{F}'(\!(u)\!))/GL_d(\mathbb{F}'[\![u]\!])\ ;\ \forall\alpha\in S, \mathrm{div}\left((g^\alpha)^{-1}A^\alpha\sigma(g^{F^{-1}\circ\alpha})\right)=\mu^\alpha\right\}$$

et

$$\left\{(\overline{g^\alpha})\in\prod_{\alpha\in S} GL_d(\mathbb{F}'(\!(u)\!))/GL_d(\mathbb{F}'[\![u]\!])\ ;\ \forall\alpha\in S, \mathrm{div}\left((g^\alpha)^{-1}A^\alpha\sigma(g^{F^{-1}\circ\alpha})\right)\leqslant\mu^\alpha\right\}.$$

On s'attend à ce que, comme dans le cas des variétés de Deligne-Lusztig affines (voir [Vie, GHKR]) un encadrement pour la dimension ait une partie linéaire en μ, ainsi qu'une partie bornée par rapport à μ. Les résultats démontrés dans la thèse font apparaître un terme linéaire, et on peut penser que pour $V_{\mathbb{F}}$ quelconque, le terme linéaire sera le même que celui pour $V_{\mathbb{F}}$ triviale (dans le théorème 1.1 de [Vie], la partie linéaire de la formule est indépendante du choix de b, qui correspond ici au choix des A^α).

On souhaiterait aussi étendre les encadrements à d'autres groupes algébriques réductifs déployés, par les méthodes de [Car]. Pour cela il est nécessaire de définir la stratification (par les données combinatoires) de manière générale. La définition de la stratification dans le cas $G = (\mathrm{Res}_{k/\mathbb{F}_p}(GL_{d,k}))_{\mathbb{F}}$ étudié dans cette thèse n'est pas intrinsèque et se fait *via* l'isomorphisme $G \simeq \prod_{\alpha \in S} GL_d$. Pour un groupe réductif déployé G quelconque, on aimerait trouver une manière de définir la stratification sans faire intervenir une immersion fermée de G dans un GL_d. Une étape intermédiaire dans la recherche d'une stratification intrinsèque pourrait être de borner la dimension dans le cas des groupes symplectiques $G = Sp_{2d'}$ avec $d = 2d'$ (il s'agit en outre d'un exemple intéressant du point de vue arithmétique), quitte à utiliser l'immersion fermée $G \hookrightarrow GL_d$ dans un premier temps. Il s'agirait alors d'identifier les donnés combinatoires provenant d'une matrice symplectique parmi l'ensemble Φ des telles données, de définir le cône convexe correspondant, *etc.*

La recherche d'une formule exacte pour la dimension des variétés de Kisin incite à regarder à nouveau du côté des variétés de Deligne-Lusztig affines. Les formules conjecturées par Rapoport dans [Rap] et démontrées dans [Vie, GHKR] ont une partie linéaire faisant intervenir le produit scalaire de la demi-somme des racines positives du groupe en jeu contre le copoids μ et une partie bornée. Les résultats démontrés dans le cadre $G = (\mathrm{Res}_{k/\mathbb{F}_p}(GL_{d,k}))_{\mathbb{F}}$ de la thèse font apparaître un terme linéaire analogue, mais la partie bornée de la formule reste à déterminer.

Chapitre 1

Grassmanniennes et variétés de Kisin

Le but de ce chapitre est de définir les variétés de Kisin $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$ associées à la restriction des scalaires. Ces variétés sont des sous-schémas de la grassmannienne affine (d'un produit) de GL_d. On commence par des rappels sur la construction de la grassmannienne affine de GL_d.

1.1 Grassmanniennes affines

1.1.1 La grassmannienne affine de GL_d

On utilise [Gör] et [GoW] comme références.

Réseaux dans $E((u))^d$

On fixe un corps E. On s'intéresse au foncteur $\mathcal{L}att_d$ paramétrant les réseaux de $R((u))^d$ pour R une E-algèbre, $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. La définition suivante généralise la notion de réseau de $E((u))^d$:

Définition 1.1.1. *Soit R une E-algèbre. On note $\Lambda_R = R[\![u]\!]^d$. On dit qu'un sous-$R[\![u]\!]$-module $\mathscr{L}$ de $R((u))^d$ est un réseau s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

(i) $u^N\Lambda_R \subseteq \mathscr{L} \subseteq u^{-N}\Lambda_R$ et

(ii) $u^{-N}\Lambda_R/\mathscr{L}$ est localement libre de rang fini sur R.

On note $\mathcal{L}att_d(R) = \{$réseaux de $R((u))^d\}$ et pour un $N \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\mathcal{L}att_d^N(R) = \{\mathscr{L} \in \mathcal{L}att_d(R) \ ; \ \mathscr{L} \text{ vérifie } (i) \text{ et } (ii)\}.$$

Remarque 1.1.2. Si $\mathscr{L} \in \mathcal{L}att_d^N(R)$, et si R' une R-algèbre, les inclusions

$$u^N\Lambda_R \subseteq \mathscr{L} \subseteq u^{-N}\Lambda_R$$

induisent des injections

$$u^N\Lambda_{R'} \longrightarrow \mathscr{L} \otimes_{R[\![u]\!]} R'[\![u]\!] \longrightarrow u^{-N}\Lambda_{R'}.$$

En effet, la composée est l'inclusion $u^N\Lambda_{R'} \subseteq u^{-N}\Lambda_{R'}$, donc la première flèche est injective. Pour la deuxième, il suffit de montrer que la composée

$$\mathscr{L} \subseteq u^{-N}\Lambda_R \subseteq u^{-2N}\mathscr{L} \xrightarrow{u^{2N}\cdot} \mathscr{L}$$

reste injective après extension des scalaires : on a $\mathscr{L}$ projectif (voir le lemme 2.11 de [Gör]) donc il existe un $R[\![u]\!]$-module $\mathscr{M}$ tel que $\mathscr{L} \oplus \mathscr{M}$ soit libre. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L} \arrow[r, "u^{2N}\cdot"] \arrow[d, "i"'] & \mathscr{L} \arrow[d] \\ \mathscr{L} \oplus \mathscr{M} \arrow[r, "f"'] & \mathscr{L} \oplus (\mathscr{L} \oplus \mathscr{M}) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les injections canoniques et f est $(l, g) \mapsto (u^{2N} l, 0, u^{2N} g)$. Mais $\mathscr{L} \oplus \mathscr{M}$ est libre sur $R[\![u]\!]$, et en prenant une base on montre que $f \otimes R'[\![u]\!]$ est injective. D'autre part $i \otimes R'[\![u]\!]$ est clairement injective. On a ainsi l'injectivité de $(u^{2N}\cdot) \otimes R'[\![u]\!]$.

On obtient donc des foncteurs $\mathcal{L}att_d$ et $\mathcal{L}att_d^N$ de $(E-\mathrm{alg})$ dans (Ens) : si on a un morphisme de E-algèbres $R \to R'$ et si $\mathscr{L} \in \mathcal{L}att_n^N$, on note $\mathscr{L}'$ l'image du morphisme $\mathscr{L} \otimes_{R[\![u]\!]} R'[\![u]\!] \longrightarrow u^{-N}\Lambda_{R'}$. Le lemme 1.1.3 ci-après montre que

$$\begin{aligned} u^{-N}\Lambda_{R'}/\mathscr{L}' &= \left(u^{-N}\Lambda_R \otimes_{R[\![u]\!]} R'[\![u]\!]\right)/Im\left(\mathscr{L} \otimes_{R[\![u]\!]} R'[\![u]\!]\right) \\ &\cong \left(u^{-N}\Lambda_R/\mathscr{L}\right) \otimes_{R[\![u]\!]} R'[\![u]\!] \\ &\cong \underbrace{\left(u^{-N}\Lambda_R/\mathscr{L}\right)}_{\text{loc. libre de rang fini sur } R} \otimes_R R' \end{aligned}$$

et on a bien $\mathscr{L}' \in \mathcal{L}att_d^N(R')$.

Lemme 1.1.3. *Soient R un anneau et R' une R-algèbre, M un $R[\![u]\!]$-module. On suppose qu'il existe $b \geqslant 0$ tel que $u^b \in Ann(M)$. Alors le morphisme naturel*

$$M_R \otimes_R R' \longrightarrow M \otimes_{R[\![u]\!]} R'[\![u]\!]$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Par simplification on a

$$M \otimes_{R[\![u]\!]} (R[\![u]\!] \otimes_R R') = M \otimes_R R'.$$

Mais

$$\begin{aligned} M \otimes_{R[\![u]\!]} (R[\![u]\!] \otimes_R R') &= M \otimes_{R[\![u]\!]} \frac{R[\![u]\!] \otimes_R R'}{(u^b \otimes 1)} \\ &= M \otimes_{R[\![u]\!]} \frac{R'[\![u]\!]}{(u^b)} \\ &= M \otimes_{R[\![u]\!]} R'[\![u]\!] \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient de l'isomorphisme $(R[\![u]\!] \otimes_R R')/(u^b) \longrightarrow R'[\![u]\!]/(u^b)$ induit par le morphisme naturel $R[\![u]\!] \otimes_R R' \to R'[\![u]\!]$. □

On s'intéresse à la représentabilité de $\mathcal{L}att_d^N$. On pose pour $r \in [\![-Nd, Nd]\!]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}att_d^{r,N} : \quad (E-\mathrm{alg}) &\longrightarrow (Ens) \\ R &\longmapsto \left\{ \mathscr{L} \in \mathcal{L}att_n^N(R) \; ; \; \begin{array}{c} \text{l'image de } det(\mathscr{L}) := \wedge^d_{R[\![u]\!]}\mathscr{L} \\ \text{dans } \wedge^d_{R[\![u]\!]}(u^{-N}\Lambda_R) \text{ est } u^r R[\![u]\!] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.4. Si $\mathscr{L} \in \mathcal{L}att_n^N(R)$, $\mathscr{L}$ est projectif (voir [Gör] à nouveau) donc ([Bo1]) le morphisme $\wedge^d_{R[\![u]\!]}\mathscr{L} \longrightarrow \wedge^d_{R[\![u]\!]}(u^{-N}\Lambda_R)$ est injectif.

Les $\mathcal{L}att_d^{r,N}$ sont des sous-foncteurs de $\mathcal{L}att_d^N$: si $R \to R'$ est un morphisme de E-algèbres et si $\mathscr{L} \in \mathcal{L}att_d^{r,N}(R)$ et $\mathscr{L}' = \mathcal{L}att_d(R \to R')(\mathscr{L})$ on a $\wedge^d_{R'[\![u]\!]}\left(\mathscr{L} \otimes_{R[\![u]\!]} R'[\![u]\!]\right) = \left(\wedge^d_{R[\![u]\!]}\mathscr{L}\right) \otimes_{R[\![u]\!]} R'[\![u]\!]$ donc $\mathscr{L}' \in \mathcal{L}att_d^{r,N}(R')$.

Les foncteurs $\mathcal{L}att_d^{r,N}$ sont représentables : on va montrer que $\mathcal{L}att_d^{r,N}$ est un sous-schéma fermé de la grassmannienne $G_r = Grass_{Nd+r,2Nd}(u^{-N}\Lambda_E/u^N\Lambda_E)$.

Rappels sur la grassmannienne affine

On renvoie à [GoW] pour des détails sur la grassmannienne.
Si $E \xrightarrow{s} R$ est le morphisme structural, $G_r(R)$ est l'ensemble des sous-modules $\mathscr{U}$ de $s^*\mathscr{E}$ tels que $s^*\mathscr{E}/\mathscr{U}$ soit localement libre de rang $Nd+r$ ou encore l'ensemble des sous-R-modules U de $u^{-N}\Lambda_R/u^N\Lambda_R$ tels que $(u^{-N}\Lambda_R/u^N\Lambda_R)/U$ soit localement libre sur R de rang $Nd+r$ avec $\mathscr{E}$ le $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(E)}$-module associé à $u^{-N}\Lambda_E/u^N\Lambda_E$.
La grassmannienne G_r est un schéma projectif sur E, dont un recouvrement ouvert affine est $G_r = \cup_I G_r^I$ où I parcourt les parties de $F = [\![1,d]\!] \times [\![-N,N[\![$ de cardinal $Nd+r$, avec

$$\begin{aligned} G_r^I(R) &= \left\{U \in G_r(R)\ ;\ R^I \hookrightarrow u^{-N}\Lambda_R/u^N\Lambda_R \twoheadrightarrow (u^{-N}\Lambda_R/u^N\Lambda_R)/U \text{ est un isomorphisme}\right\} \\ &= \left\{U \in G_r(R)\ ;\ u^{-N}\Lambda_R/u^N\Lambda_R = R^I \oplus U\right\}. \end{aligned}$$

Ici on considère la base $\left(\overline{u^je_i}\right)_{(i,j)\in F}$ de $u^{-N}\Lambda_R/u^N\Lambda_R$, et la flèche $R^I \hookrightarrow u^{-N}\Lambda_R/u^N\Lambda_R$ est l'injection canonique.
Les G_r^I sont représentables par des espaces affines : les flèches

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_E^{I\times F\setminus I}(R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_R(R^{F\setminus I}, R^I) \\ (a_{s,t})_{(s,t)\in I\times F\setminus I} & \longmapsto & \left(\overline{u^je_i} \mapsto \sum_{s\in I} a_{i',j',i,j}.\overline{u^{j'}e_{i'}}\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(R^{F\setminus I}, R^I) & \xrightarrow{\sim} & G_r^I(R) \\ \left(\overline{u^je_i} \mapsto \sum_{s\in I} a_{i',j',i,j}.\overline{u^{j'}e_{i'}}\right) & \longmapsto & \left\langle\left\{\overline{u^je_i} + \sum_{s\in I} a_{i',j',i,j}.\overline{u^{j'}e_{i'}}\ ;\ (i,j)\in F\setminus I\right\}\right\rangle \end{array}$$

sont des bijections fonctorielles.

La représentabilité des $\mathcal{L}att_d^{r,N}$

Pour R une E-algèbre on a la flèche

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}att_d^{r,N}(R) & \longrightarrow & G_r(R) \\ \mathscr{L} & \longmapsto & \mathscr{L}/u^N\Lambda_R \end{array}$$

En effet, si $\mathscr{L} \in \mathcal{L}att_d^N(R)$ et $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, notons k le corps résiduel de $R_\mathfrak{p}$ et $\mathscr{L}_k = \mathscr{L} \otimes_{R[\![u]\!]} k[\![u]\!]$. Il existe une base $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de $u^{-N}\Lambda_k$ et des entiers naturels $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_d$ tels que $(u^{a_i}g_i)_i$ soit une base de $\mathscr{L}_k$ sur $k[\![u]\!]$. Donc

$$u^{-N}\Lambda_k/\mathscr{L}_k \simeq \bigoplus_{i=1}^d k[\![u]\!]/(a_i)$$

or par le lemme 1.1.3 on a

$$(u^{-N}\Lambda_R/\mathscr{L}) \otimes_R k = (u^{-N}\Lambda_R/\mathscr{L}) \otimes_{R[\![u]\!]} k[\![u]\!] = u^{-N}\Lambda_k/\mathscr{L}_k$$

d'où $rg_{\mathfrak{p}}(u^{-N}\Lambda_R/\mathscr{L}) = \sum_{i=1}^d a_i$.
D'autre part en notant $\wedge$ le produit extérieur sur $u^{-N}k[\![u]\!]^d$, la famille $(u^N g_i)_i$ étant une base de Λ_k sur $k[\![u]\!]$ on a $u^N g_1 \wedge \cdots \wedge u^N g_d \in k[\![u]\!]^\times$, et si $(x_{i,j}) \in M_d(k[\![u]\!])$, et $x_i = \sum_j x_{i,j}(u^{a_j} g_j)$ on a

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_d = u^{-Nd+\sum_i a_i} det(x_{i,j})(u^N g_1 \wedge \cdots \wedge u^N g_d)$$

donc $\wedge^d_{k[\![u]\!]}\mathscr{L}_k = u^{-Nd+\sum_i a_i} k[\![u]\!]$ dans $u^{-Nd}k[\![u]\!]$.
Mais $\wedge^d_{k[\![u]\!]}\mathscr{L}_k = (\wedge^d_{R[\![u]\!]}\mathscr{L}) \otimes_{R[\![u]\!]} k[\![u]\!] = u^r k[\![u]\!]$, ainsi on obtient

$$r = -Nd + \sum_{i=1}^d a_i \quad \text{et} \quad rg_{\mathfrak{p}}(u^{-N}\Lambda_R/\mathscr{L}) = Nd + r$$

donc $\mathscr{L}/u^N\Lambda_R \in G_r(R)$.

La flèche $\mathcal{L}att_d^{r,N}(R) \to G_r(R)$ est injective et son image est l'ensemble $G_r^u(R)$ des sous-modules de $u^{-N}\Lambda_R/u^N\Lambda_R$ stables par (l'endomorphisme induit par) u : si $W \in G_r(R)$ est stable par u alors $\mathscr{L} = \pi^{-1}(W) \in \mathcal{L}att_d^N(R)$, où $\pi : u^{-N}\Lambda_R \to u^{-N}\Lambda_R/u^N\Lambda_R$ est la surjection canonique. De plus on a bien $\wedge^d_{R[\![u]\!]}\mathscr{L} = u^r R[\![u]\!]$. Mais G_r^u est un sous-schéma fermé de G_r. Ainsi $\mathcal{L}att_d^{r,N} = G_r^u$ est un E-schéma projectif, puisque G_r l'est.

Un recouvrement ouvert de $\mathcal{L}att_d^{r,N}$

On souhaite écrire un recouvrement ouvert de $\mathcal{L}att_d^{r,N}$. Si on note π le morphisme $\mathcal{L}att_d^{r,N} \to G_r$, on a $\mathcal{L}att_d^{r,N} = \cup_I \, \pi^{-1}(G_r^I)$ où I parcourt les parties de F de cardinal $Nd+r$. En fait on peut se limiter aux tels $I \subseteq F$ sous-saturés, *i.e.* tels que si $(i,j) \in I$ et $j-1 \geqslant -N$ alors $(i, j-1) \in I$.
En effet il suffit de montrer que si K est une extension de E, on a

$$\pi_K(\mathcal{L}att_d^{r,N}(K)) = \bigcup_{I \text{ sous-saturé}} G_r^I(K).$$

Mais si $\mathscr{L} \in \mathcal{L}att_d^{r,N}(K)$, posons $W = \mathscr{L}/u^N\Lambda_K$. Si $W \neq u^{-N}\Lambda_K/u^N\Lambda_K$, il existe $(i,j) \in F$ tels que $\overline{u^j e_i} \notin W$. On pose $j_i = \max\left\{j ; \overline{u^j e_i} \notin W\right\}$. Puisque W est stable par u on a $\overline{u^j e_i} \notin W$ pour $-N \leqslant j \leqslant j_i$. On a aussi $\overline{u^j e_i} \in W$ pour $j > j_i$. On recommence avec $W \oplus (\oplus_{-N \leqslant j \leqslant j_i} K.\overline{u^j e_i})$ qui est encore u-stable.
On montre ainsi qu'il existe une partie I de F sous-saturée telle que

$$u^{-N}\Lambda_K/u^N\Lambda_K = W \oplus (\oplus_{(i,j)\in I} K.\overline{u^j e_i})$$

i.e. $W \in G_r^I(K)$.

On note $\mathcal{L}att_d^{r,N,I} = \pi^{-1}(G_r^I)$, donc

$$\mathcal{L}att_d^{r,N,I}(R) = \left\{\mathscr{L} \in \mathcal{L}att_d^{r,N}(R) \ ; \ \left(\mathscr{L}/u^N\Lambda_R\right) \oplus R^I = u^{-N}\Lambda_R/u^N\Lambda_R\right\}.$$

L'immersion fermée $\mathcal{L}att_d^{r,N,I} \longrightarrow G_r^I$ induit un isomorphisme de $\mathcal{L}att_d^{r,N,I}$ sur le sous-schéma fermé $G_r^{u,I}$ de G_r^I. On identifie $G_r^{u,I}$ à un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_E^{I\times F\setminus I}$ via l'isomorphisme $G_r^I \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_E^{I\times F\setminus I}$.
On obtient sur les E-points un homéomorphisme (pour les topologies de Zariski)

$$\begin{array}{ccc} G_r^{u,I}(E) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{L}att_d^{r,N,I}(E) \\ (a_{s,t})_{(s,t)\in I\times F\setminus I} & \longmapsto & \text{le réseau engendré par la famille } E[\![u]\!]\text{-libre } (b_i^I)_{1\leqslant i\leqslant d} \end{array}$$

avec pour $i \in [\![1,d]\!]$,

$$b_i^I = \begin{cases} u^j e_i + \sum_{(i',j')\in I} a_{i,j,i',j'} u^{j'} e_{i'} & \text{si } j = \inf\{j_0 \ ;\ (i,j_0) \in F\backslash I\} \text{ est } < +\infty \\ u^N e_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

La grassmannienne affine de GL_d

On souhaite définir les variétés $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$ comme des sous-variétés de la grassmannienne affine $Grass_d$ de $GL_{d,E}$. La grassmannienne $Grass_d$ est la faisceautisation du foncteur

$$(E\text{-algèbres}) \longrightarrow (Ens),\ R \longmapsto \frac{GL_{d,E}(R(\!(u)\!))}{GL_{d,E}(R[\![u]\!])}.$$

On montre (voir [Gör]) que les morphismes

$$\begin{array}{ccc} \frac{GL_d(R(\!(u)\!))}{GL_d(R[\![u]\!])} & \longrightarrow & \mathcal{L}att_d(R) \\ A.GL_d(R[\![u]\!]) & \longmapsto & A.\Lambda_R \end{array}$$

induisent un isomorphisme de $Grass_d$ vers $\mathcal{L}att_d$.

Définition 1.1.5. *On appelle E-espace un foncteur covariant $\mathcal{F}$ de la catégorie des E-algèbres dans la catégorie des ensembles vérifiant l'axiome des faisceaux pour la topologie fpqc : pour tout morphisme fidèlement plat $R \to R'$ de E-algèbres, le diagramme*

$$\mathcal{F}(R) \to \mathcal{F}(R') \rightrightarrows \mathcal{F}(R' \otimes_R R')$$

est exact.
Un ind-schéma est un E-espace $\mathcal{F}$ qui s'écrit comme la limite inductive, dans la catégorie des E-espaces, d'un système inductif de E-schémas.
On dit que $\mathcal{F}$ est un ind-schéma strict si on peut choisir un système inductif où les flèches de transition sont des immersions fermées.
On dit que $\mathcal{F}$ est ind-projectif si on peut choisir un système inductif $(X_n)_n$ de E-schémas où les flèches de transition sont des immersions fermées et les X_n sont projectifs sur E.

Remarque 1.1.6. La limite inductive d'un système inductif $(\mathcal{F}_n)_n$ de E-espaces est la faisceautisation du foncteur $R \mapsto \varinjlim_n \mathcal{F}_n(R)$.

Le foncteur $\mathcal{L}att_d$ est un ind-schéma strict, limite inductive des E-schémas projectifs $\mathcal{L}att_d^N$ pour $N \geqslant 0$. On a $\mathcal{L}att_d^N = \coprod_{-N\leqslant r\leqslant N} \mathcal{L}att_d^{r,N}$ au sens de la réunion disjointe dans le point de vue des schémas, et au sens de la faisceautisation du préfaisceau $\coprod_{-N\leqslant r\leqslant N} \mathcal{L}att_d^{r,N}$ du point de vue des foncteurs de points. On pose $Grass_d^N = \mathcal{L}att_d^N$. Sur les E-points on a

$$\begin{aligned} Grass_d^N(E) &= \coprod_{-N\leqslant r\leqslant N} \mathcal{L}att_d^{r,N}(E) \\ &= \left\{ L \text{ réseau de } E(\!(u)\!)^d \ ;\ u^N\Lambda_E \subseteq L \subseteq u^{-N}\Lambda_E \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi la grassmannienne affine $Grass_d$ est un ind-schéma strict, limite inductive des E-schémas projectifs $\mathcal{L}att_d^N$ pour $N \geqslant 0$.

1.2 Définition des variétés de Kisin

On définit les (variantes de) variétés de Kisin qui vont nous occuper dans la suite de la thèse.

On reprend la situation décrite dans la partie « les résultats de la thèse » de l'introduction. Soient p un nombre premier, k un corps fini de caractéristique p. Pour simplifier, et puisque l'on s'intéresse ici uniquement à la dimension des variétés étudiées, on prend maintenant (et pour toute la suite) pour E une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$. On note $S = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(k, E)$ l'ensemble des plongements.

Soit $d \geqslant 1$. On pose

$$G = (Res_{k/\mathbb{F}_p}(GL_{d,k}))_E.$$

Le groupe G est un produit de GL_d : il est isomorphe à $\prod_{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(k,E)} GL_{d,E}$.

On fixe $h' \in \mathbb{N}$, et on définit F comme le Frobenius $E \to E, x \mapsto x^{p^{h'}}$. On fixe également $h, b \in \mathbb{N}$ avec $b \geqslant 2$, et on note

$$\begin{array}{cccc} \sigma : & E((u)) & \longrightarrow & E((u)) \\ & \sum_{i \gg -\infty} a_i.u^i & \longmapsto & \sum_{i \gg -\infty} a_i^{p^h}.u^{bi} \end{array}.$$

On note encore $\sigma : E((u))^d \to E((u))^d, (x_i)_i \mapsto (\sigma(x_i))_i$ l'application agissant coordonnée par coordonnée. On pose $M = E((u))^d$ et $M' = E((u^{1/b}))^d$. On note $(e_i)_{i \in [\![1,d]\!]}$ la base canonique de M'.

Le groupe G étant un produit de copies du groupe linéaire général, on choisit pour tore maximal de G le tore T produit du tore maximal standard de $GL_{d,E}$. Le système de racines de G est la réunion disjointe de copies du système de racines standard de GL_d, indexées par S. On prend pour base du système de racines de G la réunion des bases standard, et un copoids $\mu = (\mu_j^\alpha) \in \mathbb{Z}^{S \times [\![1,d]\!]}$ est dominant ssi pour tout $\alpha \in S$ on a $\mu_1^\alpha \geqslant \cdots \geqslant \mu_d^\alpha$. La relation d'ordre induite par le choix de la base est donnée par $\mu' \leqslant \mu$ ssi pour tout $\alpha \in S$, pour tout $s \in [\![1,d]\!]$ on a $\sum_{j=1}^s \mu_j'^\alpha \leqslant \sum_{j=1}^s \mu_j^\alpha$ avec égalité si $s = d$. On note $\mu' < \mu$ si $\mu' \leqslant \mu$ et $\mu' \neq \mu$. Le groupe de Weil obtenu est le produit $\prod_{\alpha \in S} \mathfrak{S}_d$.

Pour une matrice $N \in GL_d(E((u)))$ (respectivement deux réseaux L_1 et L_2 de M) on note $\mathrm{div}(N)$ (resp. $\mathrm{div}(L_1/L_2)$) les diviseurs élémentaires de la matrice N (resp. du réseau L_1 par rapport au réseau L_2).

On va utiliser dans la suite la valuation v habituelle sur $E((u))$, que l'on prolonge à $E((u^{1/b}))$ en posant $v(u^{1/b}) = \frac{1}{b}$. On note encore v l'application

$$\begin{array}{ccl} M' & \longrightarrow & (\frac{1}{b}\mathbb{Z} \times [\![1,d]\!]) \cup \{+\infty\} \\ (x_j)_j & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (q,i) \text{ avec } q = \min_j \ v(x_j) \text{ et } i = \min\{j ; v(x_j) = q\} & \text{si } (x_j)_j \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}.$$

Si $a \in E((u^{1/b}))$ on a alors $v(a.(x_j)_j) = v(a) + v((x_j)_j)$ avec les conventions habituelles.
Si on met l'ordre lexicographique sur $\frac{1}{b}\mathbb{Z} \times [\![1,d]\!]$ (*i.e.* $(q,i) \leqslant (q',i')$ ssi $q < q'$ ou ($q = q'$ et $i \leqslant i'$)) on a $v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$ pour $x, y \in E((u^{1/b}))^d$, avec égalité si $v(x) \neq v(y)$.

Diviseurs élémentaires et mineurs de matrices

On aura besoin dans la suite des faits suivants : si A est un anneau et $f : A^d \to A^d$ est A-linéaire, notons $\mathcal{C} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ la base canonique de A^d. Si $i \in [\![1,d]\!]$, une base de la i-ème puissance extérieure $\wedge^i A^d$ de A^d est $\mathcal{C}_i = (e_I)_{I \subseteq [\![1,d]\!], \#I = i}$ avec $e_I = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$ pour

$I = \{j_1 < \cdots < j_i\}$. Alors, au signe près, le coefficient d'indice I, J de $Mat(\wedge^i f, \mathcal{C}_i)$ est le mineur de taille $i \times i$ de $Mat(f, \mathcal{C})$ obtenu à partir des lignes indicées par I et des colonnes indicées par J. En particulier, si $N, N' \in M_d(A)$, les mineurs de NN' s'obtiennent au signe près à partir de ceux de N et N' par l'égalité $\wedge^i(NN') = (\wedge^i N)(\wedge^i N')$.

Ainsi, en prenant $A = E(\!(u)\!)$ et $N \in GL_d(E(\!(u)\!))$, notons $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ les diviseurs élémentaires de N, et soit Δ la matrice diagonale $\text{diag}(u^{\mu_1}, \dots, u^{\mu_d})$. Il existe $B, B' \in GL_d(E[\![u]\!])$ telles que $BNB' = \Delta$. D'où $(\wedge^i B)(\wedge^i N)(\wedge^i B') = \wedge^i \Delta$ avec $\wedge^i B, \wedge^i B'$ inversibles. Donc le sous-$E[\![u]\!]$-module de $E(\!(u)\!)$ engendré par les mineurs de taille i de N est égal au sous-module de $E(\!(u)\!)$ engendré par les mineurs de taille i de Δ, donc est égal (les μ_j sont décroissants) à $u^{\mu_{d-i+1}+\cdots+\mu_d} E[\![u]\!]$.

Maintenant si $N, N' \in GL_d(E(\!(u)\!))$, que peut-on dire des diviseurs élémentaires de NN' en fonction de ceux de N et N' ? Notons $\nu = \text{div}(NN')$, $\mu = \text{div}(N)$ et $\mu' = \text{div}(N')$. Aux signes près on a $\wedge^i(NN') = (\wedge^i N)(\wedge^i N')$ donc le sous-$E[\![u]\!]$-module de $E(\!(u)\!)$ engendré par les mineurs de taille i de NN' est inclus dans le sous-module engendré par les produits des mineurs de N par les mineurs de N', *i.e.* on a

$$u^{\nu_{d-i+1}+\cdots+\nu_d} E[\![u]\!] \subseteq u^{(\mu_{d-i+1}+\mu'_{d-i+1})+\cdots+(\mu_d+\mu'_d)} E[\![u]\!]$$

i.e.

$$\sum_{j=d-i+1}^{d} \nu_j \geqslant \sum_{j=d-i+1}^{d} (\mu_j + \mu'_j)$$

avec égalité si $i = d$. Autrement dit on a $\nu \leqslant \mu + \mu'$. En particulier $\nu_d \geqslant \mu_d + \mu'_d$ et $\nu_1 \leqslant \mu_1 + \mu'_1$.

Parties localement fermées de $Grass_d^N(E)$

Pour définir les variétés $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$ comme des sous-schémas réduits de $\prod_\alpha Grass_d^N$, il suffit de vérifier que

$$\mathcal{X}_\mu(E) = \left\{(L^\alpha)_\alpha \text{ collection de réseaux de } E(\!(u)\!)^d \ ; \ \forall \alpha \in S, \text{div}\left(\sigma(\sigma^* L^{F^{-1}\circ\alpha})/L^\alpha\right) = \mu^\alpha\right\}$$

et

$$\mathcal{X}_{\leqslant\mu}(E) = \left\{(L^\alpha)_\alpha \text{ collection de réseaux de } E(\!(u)\!)^d \ ; \ \forall \alpha \in S, \text{div}\left(\sigma(\sigma^* L^{F^{-1}\circ\alpha})/L^\alpha\right) \leqslant \mu^\alpha\right\}$$

sont des sous-ensembles localement fermés de $\prod_\alpha Grass_d^N(E)$ pour N suffisamment grand.

Lemme 1.2.1. *Si L est un réseau de $E(\!(u)\!)^d$ et $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_d) = div(\sigma(\sigma^*(L))/L)$ (avec $\mu'_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu'_d$), on a $u^{\lfloor \frac{\mu'_1}{b-1} \rfloor} \Lambda_E \subseteq L \subseteq u^{\lceil \frac{\mu'_d}{b-1} \rceil} \Lambda_E$.*

Démonstration. Notons $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ les diviseurs élémentaires de L par rapport à Λ_E. On a

$$\begin{cases} u^{\mu'_1} L \subseteq \sigma(\sigma^*(L)) \subseteq u^{\mu'_d} L \\ u^{\nu_1} \Lambda_E \subseteq L \subseteq u^{\nu_d} \Lambda_E \end{cases}$$

donc $\sigma(\sigma^*(L)) \subseteq u^{\mu'_d+\nu_d} \Lambda_E$, or par définition de ν_d il existe $x \in L$ de valuation ν_d, d'où $v(\sigma(x)) = b.\nu_d$ et $b.\nu_d \geqslant \mu'_d + \nu_d$ *i.e.* $\nu_d \geqslant \frac{\mu'_d}{b-1}$.
On a aussi $\nu = \text{div}(L/\Lambda_E) = \text{div}(\sigma^*(L)/\sigma^*(\Lambda_E))$, donc $Ann(\sigma^*(\Lambda_E)/u^{-\nu_d}\sigma^*(L)) = (u^{\nu_1-\nu_d})$.
Ainsi si $s \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ vérifie $u^s \sigma^*(\Lambda_E) \subseteq \sigma^*(L)$ alors $u^{s-\nu_d} \in Ann(\sigma^*(\Lambda_E)/u^{-\nu_d}\sigma^*(L))$ donc $s \geqslant \nu_1$.
Or on a $u^{\mu'_1+\nu_1} \Lambda_E \subseteq \sigma(\sigma^*(L))$ donc $u^{(\mu'_1+\nu_1)/b} \sigma^*(\Lambda_E) \subseteq \sigma^*(L)$ d'où $(\mu'_1 + \nu_1)/b \geqslant \nu_1$, *i.e.* $\nu_1 \leqslant \frac{\mu'_1}{b-1}$. □

Corollaire 1.2.2. *Pour chaque $\alpha \in S$, soit $\mu^\alpha = (\mu_i^\alpha)_i \in \mathbb{Z}^d$, avec $\mu_1^\alpha \geqslant \cdots \geqslant \mu_d^\alpha$. Il existe $N \geqslant 0$ tel que toute collection $L = (L^\alpha)_{\alpha \in S}$ de réseaux de $E(\!(u)\!)^d$ vérifiant pour tout α, div$\Big(\sigma(\sigma^* L^{F^{-1}\circ\alpha})/L^\alpha\Big) \leqslant \mu^\alpha$ vérifie également $u^N \Lambda_E \subseteq L^\alpha \subseteq u^{-N}\Lambda_E$, pour tout α.*

Démonstration. Fixons une orbite $\Omega = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}\}$ de S sous l'action de F^{-1}, avec $F^{-1} \circ \alpha_i = \alpha_{i+1 \pmod r}$. Soit $L = (L^\alpha)_\alpha$ une collection comme dans l'énoncé. On note $\xi^\alpha = \operatorname{div}\Big(\sigma(\sigma^* L^{F^{-1}\circ\alpha})/L^\alpha\Big)$ pour chaque $\alpha \in S$. Choisissons des matrices $g_i \in GL_d(E(\!(u)\!))$ telles que $L^{\alpha_i} = g_i.\Lambda_E$. On a pour tout i,

$$\operatorname{div}(g_i^{-1}.\sigma(g_{i+1 \pmod r})) = \xi^{\alpha_i}$$

où on note encore $\sigma : GL_d(E(\!(u)\!)) \to GL_d(E(\!(u)\!))$ le morphisme agissant coefficient par coefficient par σ. Si $k \geqslant 0$ on a

$$\operatorname{div}\left(\sigma^k\left(g_{i+k \pmod r}^{-1}.\sigma\left(g_{i+k+1 \pmod r}\right)\right)\right) = b^k.\xi^{\alpha_{i+k \pmod r}}.$$

Soit $\nu^i = \operatorname{div}(g_i^{-1}.\sigma^r(g_i))$. On écrit $g_i^{-1}.\sigma^r(g_i)$ comme le produit téléscopique

$$\prod_{k=0}^{r-1}\left(\sigma^k\left(g_{i+k \pmod r}^{-1}\right)\sigma^{k+1}\left(g_{i+k+1 \pmod r}\right)\right)$$

ce qui donne $\nu^i \leqslant \sum_{k=0}^{r-1} b^k.\xi^{\alpha_{i+k \pmod r}}$, ainsi

$$\nu_d^i \geqslant \sum_{k=0}^{r-1} b^k.\xi_d^{\alpha_{i+k \pmod r}} \geqslant \sum_{k=0}^{r-1} b^k.\mu_d^{\alpha_{i+k \pmod r}}$$

et

$$\nu_1^i \leqslant \sum_{k=0}^{r-1} b^k.\xi_1^{\alpha_{i+k \pmod r}} \leqslant \sum_{k=0}^{r-1} b^k.\mu_1^{\alpha_{i+k \pmod r}}.$$

Or en appliquant le lemme 1.2.1 avec $\sigma = \sigma^r$ on obtient

$$u^{\lfloor \frac{\nu_1^i}{b^r-1} \rfloor}\Lambda_E \subseteq L^{\alpha_i} \subseteq u^{\lceil \frac{\nu_d^i}{b^r-1} \rceil}\Lambda_E$$

donc il existe bien $N \geqslant 0$ indépendant de L tel que $u^N\Lambda_E \subseteq L^{\alpha_i} \subseteq u^{-N}\Lambda_E$. □

Proposition 1.2.3. *Pour $\alpha \in S$, soit $\mu^\alpha = (\mu_i^\alpha)_i \in \mathbb{Z}^d$, avec $\mu_1^\alpha \geqslant \cdots \geqslant \mu_d^\alpha$. Soient $\mu = (\mu^\alpha)_\alpha$. Soit $N \geqslant 0$ tel que*

$$\mathcal{X}_{\leqslant\mu}(E) = \Big\{(L^\alpha)_\alpha \text{ collection de réseaux de } E(\!(u)\!)^d \ ;\ \forall\alpha, div\Big(\sigma(\sigma^* L^{F^{-1}\circ\alpha})/L^\alpha\Big) \leqslant \mu^\alpha\Big\}$$

vérifie $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}(E) \subseteq \prod_\alpha Grass_d^N(E)$. Soient des entiers $r^\alpha \in [\![-Nd, Nd]\!]$ et des sous-ensembles $I^\alpha \subseteq F = [\![1,d]\!] \times [\![-N,N[\![$ sous-saturés de cardinal $Nd + r^\alpha$.
Alors $\Big\{L \in \prod_\alpha \mathcal{L}att_d^{r^\alpha,N,I^\alpha}(E)\ ;\ L \in \mathcal{X}_{\leqslant\mu}(E)\Big\}$ est une partie fermée de $\prod_\alpha \mathcal{L}att_d^{r^\alpha,N,I^\alpha}(E)$.

Démonstration. On est immédiatement ramené à montrer que si $\mu \in \mathbb{Z}^d$ est un d-uplet décroissant,

$$\Big\{L = (L^0, L^1) \in \mathcal{L}att_d^{r^0,N,I^0}(E) \times \mathcal{L}att_d^{r^1,N,I^1}(E)\ ;\ \operatorname{div}(\sigma(\sigma^* L^1)/L^0) \leqslant \mu\Big\}$$

est une partie fermée de $\mathcal{L}att_d^{r^0,N,I^0}(E) \times \mathcal{L}att_d^{r^1,N,I^1}(E)$. On considère pour $t \in \{0,1\}$ les flèches
$$\mathcal{L}att_d^{r^t,N,I^t}(E) \xrightarrow{\pi} G_{r^t}^{u,I^t}(E) \xrightarrow{h} \mathbb{A}_E^{I^t\times F\backslash I^t}(E).$$
Le morphisme h est une immersion fermée et π est un isomorphisme. Pour tout élément L^t de $\mathcal{L}att_d^{r^t,N,I^t}(E)$, une base de L^t est $(b_i^{I^t})_{1\leqslant i\leqslant d}$ avec

$$b_i^{I^t} = \begin{cases} u^j e_i + \sum_{(i',j')\in I^t} a^t_{i,j,i',j'} u^{j'} e_{i'} & \text{si } j = \inf\{j_0 \ ; \ (i,j_0)\in F\backslash I^t\} < +\infty \\ u^N e_i & \text{sinon} \end{cases}$$

où $(a^t_{s,l})_{(s,l)\in I^t\times F\backslash I^t} = \pi(L^t) \in G_{r^t}^{u,I^t}(E)$. On note $\mathcal{B}^t(L^t)$ cette base, $\mathcal{C} = (e_i)_i$ la base canonique de $E(\!(u)\!)^d$. Par définition des $b_i^{I^0}$, les coefficients de la matrice de passage $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}^0(L^0)}$ sont de la forme $\sum_{m\in\mathbb{Z}} Q_m^{i,j}(\pi(L^0)).u^m$, où les $Q_m^{i,j}$ sont des polynômes de $E[(A_{s,l})_{(s,l)\in I^0\times F\backslash I^0}]$. En exprimant l'inverse de $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}^0(L^0)}$ via sa comatrice et l'inverse de son déterminant, on montre que les coefficients de $P_{\mathcal{B}^0(L^0),\mathcal{C}}$ sont d'une forme similaire. Notons N_L la matrice de la base $(\sigma(b_i^{I^1}))_i$ de $\sigma(\sigma^* L^1)$ exprimée dans la base $\mathcal{B}^0(L^0)$. D'après ce qui précède, il existe de nouveaux polynômes $Q_m^{i,j} \in E[(A^0_{s,l})_{(s,l)\in I^0\times F\backslash I^0} \cup (A^1_{s,l})_{(s,l)\in I^1\times F\backslash I^1}]$ tels que pour tout $L \in \mathcal{L}att_d^{r^0,N,I^0}(E) \times \mathcal{L}att_d^{r^1,N,I^1}(E)$, le coefficient d'indice (i,j) de N_L soit
$$\sum_m Q_m^{i,j}(\pi(L^0),\pi(L^1)).u^m.$$
Notons $\nu = \nu(L) = \mathrm{div}(\sigma(\sigma^* L^1)/L^0)$. La condition $\nu(L) \leqslant \mu$ est fermée : on a $\nu \leqslant \mu$ ssi
$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,d]\!], \sum_{l=1}^i \nu_l \leqslant \sum_{l=1}^i \mu_l \\ \sum_{l=1}^d \nu_l = \sum_{l=1}^d \mu_l \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \forall i \in [\![1,d]\!], \sum_{l=d-i+1}^d \nu_l \geqslant \sum_{l=d-i+1}^d \mu_l \\ \sum_{l=1}^d \nu_l = \sum_{l=1}^d \mu_l \end{cases}.$$
Mais $u^{\sum_{l=d-i+1}^d \nu_l} E[\![u]\!]$ est le sous-$E[\![u]\!]$-module de $E(\!(u)\!)$ engendré par les mineurs de taille i de N_L, donc on a $\sum_{l=d-i+1}^d \nu_l \geqslant \sum_{l=d-i+1}^d \mu_l$ ssi les valuations des mineurs de taille i de N_L sont plus grandes que $\sum_{l=d-i+1}^d \mu_l$. C'est une condition donnée par l'annulation de certains polynômes en $\pi(L^0), \pi(L^1)$, donc une condition fermée.

D'autre part on a
$$\sum_{l=1}^d \nu_l = v\left(det\left((b_1^{I^0}|\cdots|b_d^{I^0})^{-1}\sigma(b_1^{I^1}|\cdots|b_d^{I^1})\right)\right) = -r^0 + br^1$$
puisque $L^t \in \mathcal{L}att_d^{r^t,N}(E)$. Donc la condition $\sum_{l=1}^d \nu_l = \sum_{l=1}^d \mu_l$ est également fermée. □

Corollaire 1.2.4. *Avec les notations de la proposition 1.2.3, l'ensemble $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}(E)$ (respectivement $\mathcal{X}_\mu(E)$) est un fermé (resp. localement fermé) de $\prod_\alpha Grass_d^N(E)$.*

Démonstration. Les $\prod_\alpha \mathcal{L}att_d^{r^\alpha,N,I^\alpha}(E)$ forment un recouvrement ouvert de $\prod_\alpha Grass_d^N(E)$, donc $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}(E)$ est fermé, par la proposition 1.2.3.
On a alors $\mathcal{X}_\mu(E) = \mathcal{X}_{\leqslant\mu}(E)\backslash\left(\cup_{\mu'<\mu}\mathcal{X}_{\leqslant\mu'}(E)\right)$ et la réunion est finie : si $\mu' \leqslant \mu$, on a pour tout α, $\mu'^\alpha \leqslant \mu^\alpha$ donc $\mu_d^\alpha \leqslant \mu_d'^\alpha \leqslant \mu_1'^\alpha \leqslant \mu_1^\alpha$. □

Définition 1.2.5. *Soit $\mu = (\mu_j^\alpha) \in (\mathbb{Z}^d)^S$ dominant.*
On définit la variété de Kisin $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$ (respectivement $\mathcal{X}_\mu$) comme le sous-schéma fermé réduit (respectivement le sous-schéma réduit) de la grassmannienne $\prod_{\alpha\in S} Grass_d^N$ dont les E-points sont $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}(E)$ (respectivement $\mathcal{X}_\mu(E)$).

L'objet des chapitres suivants est de donner un encadrement des dimensions de $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$ et $\mathcal{X}_\mu$.

Chapitre 2

Une stratification raffinée

Dans ce chapitre on commence par définir les données combinatoires $\tilde{\varphi}(L)$ et $\varphi(L)$ associées à une collection L de réseaux. On en déduit une stratification des variétés de Kisin par des sous-variétés $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ dont on évalue la dimension dans un second temps.

2.1 La donnée combinatoire associée à un réseau

L'objet de cette section est d'associer à toute collection L de réseaux de $E(\!(u)\!)^d$ une donnée combinatoire, plus précisément pour tout $\alpha \in S$, un d-uplet $(\tilde{\varphi}_i^\alpha(L))_i$ de fonctions affines par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Cette donnée combinatoire a été définie dans [Car], c'est une adaptation des fonctions φ de l'article [Vie].

2.1.1 Définition de la donnée combinatoire

Si $L = (L^\alpha)_\alpha$ est une collection de réseaux de $E(\!(u)\!)^d$, on pose pour $\alpha \in S$ et $(q, i) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times [\![1, d]\!]$,

$$\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)(q) = \sup_{x \in \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha}), v(x)=(q,i)} \sup\{n \in \mathbb{Z} \ ; \ \sigma(x) \in u^n L^\alpha\},$$

les bornes supérieures étant prises dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
On obtient ainsi des fonctions $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L) : \frac{1}{b}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Remarque 2.1.1. On a toujours $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)(q) < +\infty$, sinon on aurait une suite $(x_{n_j})_j$ d'éléments de $\sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})$ de valuation (q, i) avec $n_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\sigma(x_{n_j}) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour la topologie induite sur M' par v. Mais $v(\sigma(x_{n_j})) = b.v(x_{n_j})$ donc $x_{n_j} \to 0$, or $v(x_{n_j}) = (q, i)$, c'est une contradiction.

Une définition alternative des $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$

On peut aussi définir les $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$ de la manière suivante :

Définition 2.1.2. *Posons pour $\mu \in \mathbb{Z}$,*

$$L^\alpha_{\geqslant\mu} = \left\{x \in \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha}) \ ; \ \sigma(x) \in u^\mu L^\alpha\right\} \ \text{ et } L^\alpha_\mu = L^\alpha_{\geqslant\mu}/L^\alpha_{\geqslant\mu+1}.$$

Le morphisme σ induit une injection σ-semi-linéaire $\bar{\sigma} : L^\alpha_\mu \to u^\mu L^\alpha / u^{\mu+1} L^\alpha$, donc la dimension $d^\alpha(\mu) = \dim_E(L^\alpha_\mu)$ vérifie $0 \leqslant d^\alpha(\mu) \leqslant d$.
On appelle valuation d'un élément x de L^α_μ le nombre

$$v(x) = \sup\{v(y) \ ; \ y \in L^\alpha_\mu \text{ représentant } x\}.$$

Remarque 2.1.3. On a alors pour $x \in L_\mu^\alpha$, $v(x) = +\infty$ ssi $x = 0$.

Lemme 2.1.4. *Soient $\mu \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in S$. Alors L_μ^α admet une base formée d'éléments de valuations 2 à 2 distinctes, et ces valuations ne dépendent pas du choix d'une telle base.*
Soit $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant d^\alpha(\mu)}$ une telle base. La valuation d'un élément non nul de L_μ^α est égale à la valuation d'un des b_i.

Démonstration. On note $L_\mu^\alpha = L_\mu$. Si $\mathcal{B} = (b_i)_i$ est une base de L_μ « ordonnée » *i.e.* telle que $v(b_1) \leqslant \cdots \leqslant v(b_{d(\mu)})$ on pose

$$N(\mathcal{B}) = \sup\{m \in [\![0, d(\mu) - 1]\!] \ ; \ \forall i \in [\![1, m]\!], v(b_i) < v(b_{i+1})\}.$$

Faisons une récurrence sur $N(\mathcal{B})$ pour montrer qu'il existe une base avec $N(\mathcal{B}) = d(\mu)$: si $\mathcal{B} = (b_i)_i$ est une base ordonnée telle que $N(\mathcal{B}) < d(\mu) - 1$ alors posons $j = N(\mathcal{B})$. On a $v(b_1) < \cdots < v(b_{j+1}) = v(b_{j+2})$. On va modifier les derniers termes de la base.
Soient $y_{j+1}, \ldots, y_{d(\mu)} \in L_{\geqslant \mu}$ des représentants de $b_{j+1}, \ldots, b_{d(\mu)}$ tels que $v(y_s) = v(b_s)$. Pour $s \in [\![j + 2, d(\mu)]\!]$ on choisit $\alpha_s \in E^\times$ tel que $v(y_s - \alpha_s.y_{j+1}) > v(y_{j+1})$ si $v(y_s) = v(y_{j+1})$, $\alpha_s = 0$ sinon. On trie alors les $y'_s = y_s - \alpha_s.y_{j+1}$ par ordre de valuation croissant pour obtenir une nouvelle base $\mathcal{B}'$ ordonnée telle que $N(\mathcal{B}') > N(\mathcal{B})$. Cela montre l'existence.

Pour l'unicité, si $\mathcal{B} = (b_i)_i$ et $\mathcal{B}' = (b'_i)_i$ sont deux bases comme dans l'énoncé du lemme, en notant $(P_{i,j}) = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ on a $b'_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d(\mu), P_{i,j} \neq 0} P_{i,j}.b_i$ et les $P_{i,j}.b_i$ sont de valuations 2 à 2 distinctes donc

$$v(b'_j) = \min_{1 \leqslant i \leqslant d(\mu), P_{i,j} \neq 0} v(b_i) = v(b_{\min\{i \ ; \ P_{i,j} \neq 0\}}).$$

On obtient l'inclusion de $\{v(b_i) \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant d(\mu)\}$ dans $\{v(b'_i) \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant d(\mu)\}$.

On choisit des représentants $y_i \in L_{\geqslant \mu}^\alpha$ des b_i, tels que $v(y_i) = v(b_i)$. Si $\bar{x} \in L_\mu^\alpha \backslash \{0\}$ est représenté par $x \in L_{\geqslant \mu}^\alpha$ avec $v(\bar{x}) = v(x)$ alors

$$\bar{x} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d(\mu), x_i \neq 0} x_i b_i \quad i.e. \quad \left(x - \sum_{1 \leqslant i \leqslant d(\mu), x_i \neq 0} x_i y_i\right) \in L_{\geqslant \mu+1}^\alpha.$$

Supposons $v(x) \notin \{v(y_i) \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant d^\alpha(\mu)\}$. Dans ce cas $v(x - \sum_{1 \leqslant i \leqslant d(\mu), x_i \neq 0} x_i y_i) = \min(v(x), \min_{i, x_i \neq 0} v(y_i))$. C'est contradictoire, car cela implique que $v(\bar{x}) > v(x)$ ou $v(b_i) > v(y_i)$ pour un certain i (par exemple si $z = x - \sum_{1 \leqslant i \leqslant d(\mu), x_i \neq 0} x_i y_i$ vérifie $v(z) = v(x)$, il existe $\lambda \in E$ tel que $v(x - \lambda z) > v(x)$ mais $z \in L_{\geqslant \mu+1}^\alpha$).
Finalement on a bien $v(x) \in \{v(y_i) \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant d^\alpha(\mu)\}$. $\square$

Pour $\alpha \in S$ et $\mu \in \mathbb{Z}$, on définit $(v_1^\alpha(\mu), i_1^\alpha(\mu)) < \ldots < (v_{d^\alpha(\mu)}^\alpha(\mu), i_{d^\alpha(\mu)}^\alpha(\mu))$ comme les valuations triées par ordre croissant d'une base de L_μ^α (formée d'éléments de valuations deux à deux distinctes).

Proposition 2.1.5. *Pour tous $\alpha \in S$ et $\mu \in \mathbb{Z}$,*

$$\left\{(q, i) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times [\![1, d]\!] \ ; \ \tilde{\varphi}_i^\alpha(L)(q) = \mu\right\} = \{(v_s^\alpha(\mu), i_s^\alpha(\mu)) \ ; \ 1 \leqslant s \leqslant d^\alpha(\mu)\}.$$

Démonstration. Pour tous $\alpha \in S$, $\mu \in \mathbb{Z}$ et $(q, i) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times [\![1, d]\!]$ on a

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i^\alpha(L)(q) = \mu \iff & L_{\geqslant \mu}^\alpha \text{ contient un élément de valuation } (q, i) \text{ et pas } L_{\geqslant \mu+1}^\alpha \\ \iff & \exists s \in [\![1, d^\alpha(\mu)]\!] \text{ tel que } (q, i) = (v_s^\alpha(\mu), i_s^\alpha(\mu)). \end{aligned}$$

La première équivalence est immédiate, pour la deuxième on utilise le lemme 2.1.4. $\square$

2.1.2 Propriétés des $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$

Les $\tilde{\varphi}_i^\alpha$ vérifient des propriétés analogues à celles des fonctions φ dans [Vie] :

Proposition 2.1.6. *Soit L un réseau de M. Alors*

$$\tilde{q}_i = \inf\left\{q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}\ ;\ \exists x \in L' \text{ tel que } v(x) = (q,i)\right\}$$

est un entier. De plus il existe $x \in L$ tel que $v(x) = (\tilde{q}_i, i)$.

Démonstration. Si $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$, il existe $x \in L'$ tel que $v(x) = (q,i)$ ssi

$$u^q.e_i \in L' + \sum_{j=1}^{i} u^{q+\frac{1}{b}} e_j.E[\![u^{1/b}]\!] + \sum_{j=i+1}^{d} u^q e_j.E[\![u^{1/b}]\!].$$

Si l'on fixe une base $m_1, ..., m_d$ de L sur $E[\![u]\!]$ et que l'on note M_j, E_j les vecteurs colonnes des coordonnées de m_j, e_j dans la base canonique $(e_j)_j$, on a

$$\begin{aligned} & \exists x \in L' \text{ tel que } v(x) = (q,i) \\ \iff \quad & u^q.E_i \in \underbrace{< M_1, ..., M_d, u^{q+\frac{1}{b}} E_1, ..., u^{q+\frac{1}{b}} E_i, u^q E_{i+1}, ..., u^q E_d >}_{\text{sous-}E[\![u^{1/b}]\!]\text{-module de } M' \text{ engendré}}. \end{aligned}$$

Notons N^q la matrice

$$(M_1|...|M_d|u^{q+\frac{1}{b}} E_1|...|u^{q+\frac{1}{b}} E_i|u^q E_{i+1}|...|u^q E_d) \in M_{d,2d}(E(\!(u^{1/b})\!)).$$

Alors :

Lemme 2.1.7. *Il existe un entier $l' \geqslant 1$, des entiers $d_1 < \cdots < d_{l'}$, des matrices de permutations $L^0, ..., L^{l'} \in GL_d(\mathbb{Z})$ et pour chaque $\mu \in [\![0, l']\!]$,*

- $\forall j \in [\![1,d]\!]$ *un couple* $(a_j^\mu, b_j^\mu) \in \mathbb{Z} \times \{1,2,3\}$,
- $\forall (l,m), 1 \leqslant m < l \leqslant d$, $(\alpha_{l,m}^\mu, \beta_{l,m}^\mu, \gamma_{l,m}^\mu) \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}) \times \{1,2,3\} \times E[\![u]\!]^\times$,

tels que $b_m^\mu = \beta_{m+1,m}^\mu = \cdots = \beta_{d,m}^\mu$ pour tout m, et pour tout $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$, si $d_\mu \leqslant q < d_{\mu+1}$ (où $d_0 = -\infty$ et $d_{l'+1} = +\infty$), en posant

$$n_j^q = \begin{cases} a_j^\mu & si\ b_j^\mu = 1 \\ q + a_j^\mu & si\ b_j^\mu = 2 \\ q + \frac{1}{b} + a_j^\mu & si\ b_j^\mu = 3 \end{cases}$$

et

$$h_{l,m}^q = \begin{cases} \alpha_{l,m}^\mu & si\ \beta_{l,m}^\mu = 1 \\ q + \alpha_{l,m}^\mu & si\ \beta_{l,m}^\mu = 2 \\ q + \frac{1}{b} + \alpha_{l,m}^\mu & si\ \beta_{l,m}^\mu = 3 \end{cases}$$

et

$$g_{l,m}^q = u^{h_{l,m}^q}.\gamma_{l,m}^\mu$$

alors $n_1^q \leqslant n_2^q \leqslant \cdots \leqslant n_d^q$ *et il existe* $R \in GL_{2d}(E[\![u^{1/b}]\!])$ *tel que* $L^\mu N^q R$ *soit de la forme*

$$\begin{pmatrix} u^{n_1^q} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{2,1}^q & u^{n_2^q} & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ g_{d,1}^q & \dots & g_{d,d-1}^q & u^{n_d^q} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On utilise le lemme suivant :

Lemme 2.1.8. *Soient* $r \geqslant 1$, $a_1, ..., a_r \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ *et* $b_1, ..., b_r \in \{1, 2, 3\}$. *On définit*

$$\begin{array}{cccl} f_i : & \frac{1}{b}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \frac{1}{b}\mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \\ & q & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} a_i & si\ b_i = 1 \\ q + a_i & si\ b_i = 2 \\ q + \frac{1}{b} + a_i & si\ b_i = 3. \end{array} \right. \end{array}$$

Soit $e \in \mathbb{Z}$. *Alors il existe* $i_0 \in [\![1, r]\!]$ *tel que*

$$\forall q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \cap [e, e+1[\ ,\ \min_i\ f_i(q) = f_{i_0}(q).$$

Démonstration. On peut supposer que les a_i sont finis. On fait une récurrence sur r. Si $r = 1$ c'est clair. Supposons-le vrai au rang $r \geqslant 1$. Alors pour tout q on a

$$\min_i\ f_i(q) = \min(f_1(q), ..., f_{r-1}(q), \min(f_r(q), f_{r+1}(q))).$$

Ainsi on a l'hérédité si on a le lemme pour $r = 2$. On est ramené à $r = 2$. On a les cas suivants :

- si $(b_1, b_2) = (1,1), (2,2), (2,3)$ ou $(3,3)$, on prend $i_0 = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } a_1 \leqslant a_2 \\ 2 & \text{sinon} \end{array} \right.$

- si $(b_1, b_2) = (1,2)$ ou $(1,3)$, on prend $i_0 = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } e \geqslant a_1 - a_2 \\ 2 & \text{sinon} \end{array} \right.$.

Donc le lemme est vrai pour $r = 2$. □

Démonstration. (du lemme 2.1.7) Par convention on a $u^{+\infty} = 0$. On raisonne par récurrence, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(\nu)$ pour $\nu \in [\![0, d]\!]$ étant :
« il existe des entiers $d_1 < ... < d_{l'}$ ($l' \geqslant 1$), des matrices de permutations $L^0, ..., L^{l'} \in GL_d(\mathbb{Z})$ et pour chaque $\mu \in [\![0, l']\!]$,

- $\forall j \in [\![1, \nu]\!]$ un couple $(a_j^\mu, b_j^\mu) \in \mathbb{Z} \times \{1, 2, 3\}$,

- $\forall (l, m)$ avec $1 \leqslant m \leqslant \nu$ et $m < l \leqslant d$, $(\alpha_{l,m}^\mu, \beta_{l,m}^\mu, \gamma_{l,m}^\mu) \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}) \times \{1, 2, 3\} \times E[\![u]\!]^\times$,

- $\forall (s, t) \in [\![1, d - \nu]\!] \times [\![1, 2d - \nu]\!]$, $a_{s,t}^\mu \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, $b_{s,t}^\mu \in \{1, 2, 3\}$ et $c_{s,t}^\mu \in E[\![u]\!]^\times$,

tels que $b^\mu_m = \beta^\mu_{m+1,m} = \cdots = \beta^\mu_{d,m}$ pour tout $m \in [\![1,\nu]\!]$ et $b^\mu_{1,t} = b^\mu_{2,t} = \cdots = b^\mu_{d-\nu,t}$ pour tout $t \in [\![1, 2d-\nu]\!]$,
et pour tout $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$, si $d_\mu \leqslant q \leqslant d_{\mu+1}$ et si on pose pour $1 \leqslant j \leqslant \nu$

$$n^q_j = \begin{cases} a^\mu_j & \text{si } b^\mu_j = 1 \\ q + a^\mu_j & \text{si } b^\mu_j = 2 \\ q + \frac{1}{b} + a^\mu_j & \text{si } b^\mu_j = 3 \end{cases}$$

et

$$h^q_{l,m} = \begin{cases} \alpha^\mu_{l,m} & \text{si } \beta^\mu_{l,m} = 1 \\ q + \alpha^\mu_{l,m} & \text{si } \beta^\mu_{l,m} = 2 \\ q + \frac{1}{b} + \alpha^\mu_{l,m} & \text{si } \beta^\mu_{l,m} = 3 \end{cases}$$

et pour $(s,t) \in [\![1, d-\nu]\!] \times [\![1, 2d-\nu]\!]$,

$$v^q_{s,t} = \begin{cases} a^\mu_{s,t} & \text{si } b^\mu_{s,t} = 1 \\ q + a^\mu_{s,t} & \text{si } b^\mu_{s,t} = 2 \\ q + \frac{1}{b} + a^\mu_{s,t} & \text{si } b^\mu_{s,t} = 3 \end{cases}$$

il existe $R \in GL_{2d}(E[\![u^{1/b}]\!])$ tel que $L^\mu N^q R$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} u^{n^q_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g^q_{2,1} & u^{n^q_2} & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^{n^q_\nu} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & g^q_{\nu+1,\nu} & T_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & T_{1,2d-\nu} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ g^q_{d,1} & \dots & \dots & g^q_{d,\nu} & T_{d-\nu,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & T_{d-\nu,2d-\nu} \end{pmatrix}$$

avec $T_{s,t} = u^{v^q_{s,t}}.c^\mu_{s,t}$ et $g^q_{l,m} = u^{h^q_{l,m}}.\gamma^\mu_{l,m}$ et $n^q_1 \leqslant n^q_2 \leqslant \cdots \leqslant n^q_\nu \leqslant \min_{s,t}\ v(T_{s,t})$ ».

L'assertion $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Soit $\nu \in [\![0, d-1]\!]$, supposons $\mathcal{H}(\nu)$ vraie.
Vu la forme des $v^q_{s,t}$ et par le lemme 2.1.8, quitte à rajouter des d_μ, à multiplier les L^μ à gauche par des matrices de la forme $\begin{pmatrix} I_\nu & 0 \\ 0 & L'^\mu \end{pmatrix}$ avec L'^μ matrice de permutation et à permuter les $a^\mu_{s,t}$, $b^\mu_{s,t}$ et $c^\mu_{s,t}$, on peut supposer qu'on a $\mathcal{H}(\nu)$ vraie avec de plus

$$v^q_{1,1} = \min_{s,t}\ v^q_{s,t}$$

pour tout q.
On peut également supposer que $T_{1,1} = u^{v^q_{1,1}}$.
On pose alors $(a^\mu_{\nu+1}, b^\mu_{\nu+1}) = (a^\mu_{1,1}, b^\mu_{1,1})$ pour tout μ, ainsi on a $n^q_{\nu+1} = v^q_{1,1} \geqslant n^q_\nu$ pour tout q (on a $a^\mu_{\nu+1} \neq +\infty$ puisque sinon $T = 0$ et N^μ a au plus $\nu < d$ colonnes $k((u^{1/b}))$-indépendantes, ce qui est contradictoire).
On définit alors pour tout μ, $s \geqslant 2$ et $t \geqslant 1$, $(a'^\mu_{s,t}, b'^\mu_{s,t}, c'^\mu_{s,t})$ égal à

$$\begin{cases} (a^\mu_{s,t}, b^\mu_{s,t}, c^\mu_{s,t} - u^{a^\mu_{1,t} - a^\mu_{s,t} - a^\mu_{1,1} + a^\mu_{s,1}}.c^\mu_{1,t}.c^\mu_{s,1}) & \text{si } a^\mu_{s,t} < a^\mu_{1,t} - a^\mu_{1,1} + a^\mu_{s,1} \\ (a^\mu_{1,t} - a^\mu_{1,1} + a^\mu_{s,1}, b^\mu_{s,t}, u^{a^\mu_{s,t} - a^\mu_{1,t} + a^\mu_{1,1} - a^\mu_{s,1}}.c^\mu_{s,t} - c^\mu_{1,t}.c^\mu_{s,1}) & \text{si } a^\mu_{s,t} > a^\mu_{1,t} - a^\mu_{1,1} + a^\mu_{s,1} \\ (a^\mu_{s,t} + v(c^\mu_{s,t} - c^\mu_{1,t}.c^\mu_{s,1}), b^\mu_{s,t}, u^{-v(c^\mu_{s,t} - c^\mu_{1,t}.c^\mu_{s,1})}.(c^\mu_{s,t} - c^\mu_{1,t}.c^\mu_{s,1})) & \text{si } a^\mu_{s,t} = a^\mu_{1,t} - a^\mu_{1,1} + a^\mu_{s,1} \end{cases}$$

dans le cas où $a^\mu_{1,t} - a^\mu_{1,1} + a^\mu_{s,1} \neq +\infty$, et égal à $(a^\mu_{s,t}, b^\mu_{s,t}, c^\mu_{s,t})$ sinon.

On pose $(\alpha^\mu_{l,\nu+1}, \beta^\mu_{l,\nu+1}, \gamma^\mu_{l,\nu+1}) = (a'^\mu_{l-\nu,1}, b'^\mu_{l-\nu,1}, c'^\mu_{l-\nu,1})$ pour $\nu + 2 \leqslant l \leqslant d$.

Cette définition des triplets de l'étape $\nu + 1$ provient de la considération suivante : si $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ et si R est comme dans $\mathcal{H}(\nu)$, alors en posant

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & -T_{1,2}.u^{-n^q_{\nu+1}} & \dots & -T_{1,2d-\nu}.u^{-n^q_{\nu+1}} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

et $R'' = \begin{pmatrix} I_\nu & 0 \\ 0 & R' \end{pmatrix}$, $L^\mu N^q R R''$ est de la forme

$$\begin{pmatrix}
u^{n^q_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
g^q_{2,1} & u^{n^q_2} & \ddots & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & u^{n^q_\nu} & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & u^{n^q_{\nu+1}} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & & & g^q_{\nu+2,\nu+1} & T'_{2,2} & \dots & \dots & \dots & T'_{2,2d-\nu} \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
g^q_{d,1} & \dots & \dots & \dots & g^q_{d,\nu+1} & T'_{d-\nu,2} & \dots & \dots & \dots & T'_{d-\nu,2d-\nu}
\end{pmatrix}$$

et on a précisément $T'_{s,t} = u^{v'^q_{s,t}}.c'^\mu_{s,t}$ et $g^q_{l,m} = u^{h^q_{l,m}}.\gamma^q_{l,m}$. De plus on a bien les égalités demandées sur les $b^\mu_{l,m}$, les $\beta^\mu_{l,m}$ et les $b^\mu_{s,t}$. Enfin on a

$$v(T'_{s,t}) \geqslant \min(v^q_{s,t}, v^q_{1,t} \underbrace{-v^q_{1,1} + v^q_{s,1}}_{\in\mathbb{N}}) \geqslant \min_{s',t'} \; v^q_{s',t'} = n^q_{\nu+1}.$$

Donc $\mathcal{H}(\nu + 1)$ est vraie. □

Ainsi avec les notations du lemme 2.1.7, si $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ et μ est tel que $d_\mu \leqslant q < d_{\mu+1}$, on a

$$\begin{array}{cc}
 & (\exists x \in L' \text{ tel que } v(x) = (q,i)) \\
\iff & \exists X \in M_{2d,1}(E[\![u^{1/b}]\!]) \text{ tel que } u^q E_i = N^q.X \\
\iff & \exists X \in M_{2d,1}(E[\![u^{1/b}]\!]) \text{ tel que } u^q L^\mu E_i = (L^\mu N^q R).X \\
\iff & u^q E_{i(\mu)} \in \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} u^{n^q_1} \\ g^q_{2,1} \\ \vdots \\ g^q_{d,1} \end{pmatrix}}_{F^1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ u^{n^q_2} \\ \vdots \\ g^q_{d,2} \end{pmatrix}}_{F^2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{n^q_d} \end{pmatrix}}_{F^d} \right\rangle
\end{array}$$

avec $i(\mu)$ donné par $L^\mu E_i = E_{i(\mu)}$.

Fixons $j \in [\![1, d]\!]$ et $\mu \in [\![0, l']\!]$, et donnons une condition nécessaire et suffisante pour l'appartenance de $u^q E_j$ à $\langle F^1, \ldots, F^d \rangle$: montrons qu'il existe $e_j^{\mu,j}, \ldots, e_d^{\mu,j} \in E(\!(u)\!)$ tels que pour tout $q \in [d_\mu, d_{\mu+1}[$, $u^q E_j$ s'écrit

$$u^q E_j = \sum_{s=j}^{d} x_s F^s$$

avec $x_s = u^{q-n_s^q}.e_s^{\mu,j}$ dans la $E(\!(u^{1/b})\!)$-base $(F^1, \ldots, F^d)$.
On le fait par récurrence. Si $j' \in [\![j, d-1]\!]$ supposons qu'il existe $e_j^{\mu,j}, \ldots, e_{j'}^{\mu,j} \in E(\!(u)\!)$ tels que si $q \in [d_\mu, d_{\mu+1}[$ et $u^q E_j$ s'écrit $\sum_{s=j}^{d} x_s F^s$, alors $x_s = u^{q-n_s^q}.e_s^{\mu,j}$ pour $j \leqslant s \leqslant j'$.
Alors on vérifie que

$$e_{j'+1}^{\mu,j} = -\sum_{s=j}^{j'} u^{-n_s^q + h_{j'+1,s}^q}.\gamma_{j'+1,s}^{\mu}.e_s^{\mu,j}$$

convient. C'est bien indépendant de q car $-n_s^q + h_{j'+1,s}^q$ est constant égal à un entier pour $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \cap [d_\mu, d_{\mu+1}[$, puisque $b_s^\mu = \beta_{j'+1,s}^\mu$.

On obtient : $\forall q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \cap [d_\mu, d_{\mu+1}[$,

$$u^q E_j \in \left\langle F^1, \ldots, F^d \right\rangle \text{ ssi } \forall s \in [\![j, d]\!] \text{ on a } \begin{cases} a_s^\mu \leqslant q + v(e_s^{\mu,j}) & \text{si } b_s^\mu = 1 \\ a_s^\mu \leqslant v(e_s^{\mu,j}) & \text{si } b_s^\mu = 2 \\ a_s^\mu + 1 \leqslant v(e_s^{\mu,j}) & \text{si } b_s^\mu = 3 \end{cases}.$$

Ces conditions sont « entières », ainsi si μ est tel que $d_\mu \leqslant \tilde{q}_i < d_{\mu+1}$, on a $\tilde{q}_i = d_\mu \in \mathbb{Z}$.

Il reste à montrer qu'il existe $x \in L$ vérifiant $v(x) = (\tilde{q}_i, i)$. Dans la fin de la preuve on pose $q = \tilde{q}_i$,

$$N = N^q = (M_1|...|M_d|u^{q+\frac{1}{b}}E_1|...|u^{q+\frac{1}{b}}E_i|u^q E_{i+1}|...|u^q E_d)$$

et

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} \boxed{I_d} & & & \\ & u^{1/b} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u^{1/b} & \\ & & & & \boxed{I_{d-i}} \end{pmatrix}.$$

En reprenant la preuve du fait que $\tilde{q}_i \in \mathbb{Z}$ on montre :

Lemme 2.1.9. *Il existe des éléments $n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_d$ de $\mathbb{Z} \cup (\frac{1}{b} + \mathbb{Z})$, P une matrice de permutation de taille d, $R \in GL_{2d}(E[\![u^{1/b}]\!])$, $R' \in GL_{2d}(E[\![u]\!])$, $N' \in M_{d,2d}(E[\![u]\!])$ et une matrice diagonale $\Delta_d = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{2d} \end{pmatrix}$ avec les $c_j \in \{1, u^{1/b}\}$ tels que PNR soit de la forme*

$$\begin{pmatrix} u^{n_1} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ * & \ldots & * & u^{n_d} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

et $PNR = N'\Delta_d$ et $\Delta_0 R = R'\Delta_d$.

Démonstration. On reprend la réduction étape par étape de N faite dans le lemme 2.1.7. $\square$

On sait qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2d} \end{pmatrix} \in M_{2d,1}(E[\![u^{1/b}]\!])$ tel que $(PNR)X = u^q E_{i'}$ où i' est donné par $PE_i = E_{i'}$. Vu la forme de la matrice PNR, on peut prendre $x_{d+1} = \cdots = x_{2d} = 0$.
On a $N(RX) = u^q E_i$ donc pour conclure il suffit de montrer que les d premiers coefficients de $Y = RX$ sont dans $E[\![u]\!]$.
Les égalités $(PNR)X = u^q E_{i'}$ et $PNR = N'\Delta_d$ permettent de définir successivement des éléments $e'_1, \ldots, e'_d \in E(\!(u)\!)$ (avec $e'_1 = \cdots = e'_{i'-1} = 0$ et $e'_{i'} = 1$) tels que $x_s = u^{q-n_s}.e'_s$ pour $1 \leqslant s \leqslant d$. Donc

$$\Delta_d X = \begin{pmatrix} x_1 c_1 \\ \vdots \\ x_d c_d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x_s c_s = u^q e'_s \underbrace{u^{-n_s} c_s}_{\in E(\!(u)\!)}.$$

Ainsi les d premiers coefficients de $R'\Delta_d X$ sont dans $E[\![u]\!]$, et donc également les d premiers coefficients de $Y = \Delta_0^{-1} R'\Delta_d X$ puisque Δ_0 est diagonale par blocs, avec I_d pour premier bloc. $\square$

Proposition 2.1.10. *Soit $L = (L^\alpha)_\alpha$ un $\#S$-uplet de réseaux de M, notons $\tilde{\varphi}_i^\alpha = \tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$. Alors pour tous $\alpha \in S$ et $i \in [\![1, d]\!]$ on a*

(i) $\tilde{\varphi}_i^\alpha$ est croissante sur $\frac{1}{b}\mathbb{Z}$ et strictement croissante là où elle est finie

(ii) il existe $\tilde{q}_i^\alpha \in \mathbb{Z}$ (nécessairement unique) tel que $\tilde{\varphi}_i^\alpha$ prend des valeurs finies sur l'ensemble $[\tilde{q}_i^\alpha, +\infty[\cap\frac{1}{b}\mathbb{Z}$ exactement.
De plus pour q suffisamment grand on a $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = bq - \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$.

De plus

(iii) il existe des fonctions (uniques) $\psi_j^\alpha : \mathbb{Z} \to \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ croissantes, strictement croissantes là où elles sont finies, telles que $\psi_1^\alpha \leqslant \cdots \leqslant \psi_d^\alpha$ et $\forall\alpha \in S, \forall(q, \mu) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\#\left\{i \in [\![1, d]\!] \ ; \ \tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = \mu\right\} = \#\left\{j \in [\![1, d]\!] \ ; \ \psi_j^\alpha(\mu) = q\right\}$$

(iv) si on note $(\mu_1^\alpha, \ldots, \mu_d^\alpha) = div\left(\sigma\left(\sigma^* L^{F^{-1}\circ\alpha}\right)/L^\alpha\right)$ pour $\alpha \in S$, alors ψ_j^α est finie exactement sur $[\![\mu_j^\alpha, +\infty[\![$.

Démonstration. Fixons α et i. Si $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ est tel que $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) > -\infty$, alors il existe $x \in \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})$ tel que $v(x) = (q, i)$ et $u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)}.\sigma(x) \in L^\alpha$. Donc $u^{1/b}x \in \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})$ est de valuation $(q + \frac{1}{b}, i)$ et vérifie $u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)-1}.\sigma(u^{1/b}x) \in L^\alpha$, on obtient $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q + \frac{1}{b}) \geqslant \tilde{\varphi}_i^\alpha(q) + 1$. D'où le (i).

Pour le (ii) d'après la proposition 2.1.6, les nombres

$$\tilde{q}_i^\alpha = \inf\left\{q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \ ; \ \exists x \in \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha}) \text{ tel que } v(x) = (q, i)\right\}$$

sont des entiers. On sait également qu'il existe $x \in L^\alpha$ tel que $v(x) = (\tilde{q}_i^{F\circ\alpha}, i)$. Posons $y = \sigma^{-1}(u^{-\tilde{q}_i^{F\circ\alpha}} x) \in M'$. Si $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$, $u^q y$ est de valuation (q,i) et $\sigma(u^q y) \in u^{bq-\tilde{q}_i^{F\circ\alpha}} L^\alpha$. Or pour q grand on a $u^q y \in \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})$, d'où $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) \geqslant bq - \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$.
D'autre part pour tout $q \geqslant \tilde{q}_i^\alpha$, soit $x \in L^{F^{-1}\circ\alpha}_{\geqslant \tilde{\varphi}_i^\alpha(q)}$ tel que $v(x) = (q,i)$. Alors $u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)}\sigma(x) \in L^\alpha$ et est de valuation $(bq - \tilde{\varphi}_i^\alpha(q), i)$ donc $\tilde{q}_i^{F\circ\alpha} \leqslant bq - \tilde{\varphi}_i^\alpha(q)$ *i.e.* $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) \leqslant bq - \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$. Cela montre le point (ii).

Pour le troisième point on rappelle que les nombres $d^\alpha(\mu)$, $v_s^\alpha(\mu)$ et $i_s^\alpha(\mu)$ ont été définis dans la définition 2.1.2 et dans la proposition 2.1.5. On pose si $1 \leqslant j \leqslant d$ et $\mu \in \mathbb{Z}$,

$$\psi_j^\alpha(\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{si } j \leqslant d - d^\alpha(\mu) \\ v^\alpha_{j-d+d^\alpha(\mu)} & \text{si } j > d - d^\alpha(\mu) \end{cases}.$$

On a par définition $\psi_1^\alpha \leqslant \ldots \leqslant \psi_d^\alpha$, et pour tous α, μ et q, on a les bijections réciproques

$$\begin{array}{ccccc} \{i\ ;\ \tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = \mu\} & \longrightarrow & \{s \in [\![1, d^\alpha(\mu)]\!]\ ;\ v_s^\alpha(\mu) = q\} & \longrightarrow & \{j\ ;\ \psi_j^\alpha(\mu) = q\} \\ i & \longrightarrow & s \text{ tel que } (q,i) = (v_s^\alpha(\mu), i_s^\alpha(\mu)) & & \\ i_s^\alpha(\mu) & \longleftarrow & s & \longrightarrow & s + d - d^\alpha(\mu) \\ & & j - d + d^\alpha(\mu) & \longleftarrow & j \end{array}$$

d'où l'égalité des cardinaux demandée.
La croissance des ψ_j^α résulte du fait suivant : on a des injections E-linéaires $L_\mu^\alpha \xrightarrow{\times u^{1/b}} L_{\mu+1}^\alpha$ pour tout μ, ainsi $d^\alpha(\mu+1) \geqslant d^\alpha(\mu)$ et

$$(v_1^\alpha(\mu) + \frac{1}{b}, i_1^\alpha(\mu)) < \cdots < (v^\alpha_{d^\alpha(\mu)}(\mu) + \frac{1}{b}, i^\alpha_{d^\alpha(\mu)}(\mu))$$

sont les valuations d'éléments non nuls de $L_{\mu+1}^\alpha$.

Pour le quatrième point pour alléger les notations on note $L = L^\alpha$, $L' = \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})$ et $\mu = \mu^\alpha$. Soit alors $(l_i)_i$ une base de L telle que $(u^{\mu_i} l_i)$ soit une base de $\sigma(L')$ sur $E[\![u]\!]$. Si $\mu \in \mathbb{Z}$, on vérifie que $(u^{max(\mu_i,\mu)} l_i)$ est une base de $L^0_{\geqslant\mu} = \sigma(L') \cap u^\mu L$. On pose $f_i = u^{max(\mu_i,\mu)} l_i$. Considérons maintenant le E-espace vectoriel $L^0_\mu = L^0_{\geqslant\mu}/L^0_{\geqslant\mu+1}$. En écrivant les éléments de $L^0_{\geqslant\mu}$ dans la base $(u^{\mu_i} l_i)$, on montre que les images des f_i dans L^0_μ pour i tel que $\mu_i \leqslant \mu$, forment une base de L^0_μ. Donc $\dim_E(L^0_\mu) = \#\{i \in [\![1,d]\!]\ ;\ \mu_i \leqslant \mu\}$. Or σ induit une bijection σ-semi-linéaire de L_μ sur L^0_μ, ainsi $\dim_E(L_\mu) = \dim_E(L^0_\mu)$. Finalement pour tout μ et α on a obtenu

$$d^\alpha(\mu) = \#\{i \in [\![1,d]\!]\ ;\ \mu_i^\alpha \leqslant \mu\}$$

donc pour tout j on a $\mu_j^\alpha = min\{\mu \in \mathbb{Z}\ ;\ d^\alpha(\mu) > d - j\}$.
Mais $\psi_j^\alpha(\mu) > -\infty$ ssi $d^\alpha(\mu) > d - j$, donc ψ_j^α est finie sur $[\![\mu_j^\alpha, +\infty[\![$. □

Pour mieux les visualiser, on prolonge les fonctions $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$ à $\mathbb{R}$: pour $q \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)(q) = \begin{cases} -\infty & \text{si } q < \tilde{q}_i^\alpha \\ \tilde{\varphi}_i^\alpha(L)(q_0) + b(q - q_0) & \text{si } q \geqslant \tilde{q}_i^\alpha \end{cases}$$

avec $q_0 = sup\{q' \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}\ ;\ q' \leqslant q\}$.
On prolonge de même les ψ_j^α : pour $\mu \in \mathbb{R}$, on pose

$$\psi_j^\alpha(\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < \mu_j^\alpha \\ \psi_j^\alpha(\mu_0) + \frac{1}{b}(\mu - \mu_0) & \text{si } \mu \geqslant \mu_j^\alpha \end{cases}$$

avec $\mu_0 = \lfloor \mu \rfloor$.

Définition 2.1.11. *On note $\tilde{\Phi}$ l'ensemble des familles $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_i^\alpha)_{(i,\alpha)\in[\![1,d]\!]\times S}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ telles que*

1. *pour tout $\alpha \in S$, les $\tilde{\varphi}_i^\alpha$ sont continues à droite (on considère $-\infty$ comme un point isolé), croissantes, strictement croissantes là où elles sont finies*
2. *pour tout $\alpha \in S$, pour tout i, il existe $\tilde{q}_i^\alpha \in \mathbb{R}$ (nécessairement unique) tels que*
   - *(i) $\tilde{\varphi}_i^\alpha$ prend des valeurs finies exactement sur $[\tilde{q}_i^\alpha, +\infty[$*
   - *(ii) $\tilde{\varphi}_i^\alpha$ a un nombre fini de points de discontinuité et est affine par morceaux de pente b sur $[\tilde{q}_i^\alpha, +\infty[$*
   - *(iii) pour tout $\alpha \in S$, pour tout i, pour q suffisamment grand on a $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = bq - \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$*
3. *pour tout $\alpha \in S$, il existe une famille $(\psi_j^\alpha)_{1\leqslant j\leqslant d}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ telle que*
   - *(i) les ψ_j^α sont continues à droite, croissantes, strictement croissantes là où elles sont finies*
   - *(ii) $\psi_1^\alpha \leqslant \cdots \leqslant \psi_d^\alpha$*
   - *(iii) pour tout $(q,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\#\{i\ ;\ \tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = \mu\} = \#\{j\ ;\ \psi_j^\alpha(\mu) = q\}$.*

Définition 2.1.12. *On note $\tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$ le sous-ensemble de $\tilde{\Phi}$ composé des $\tilde{\varphi}$ tels que*

- *(i) les $\tilde{q}_i^\alpha$ sont dans $\mathbb{Z}$*
- *(ii) les points de discontinuité des $\tilde{\varphi}_i^\alpha$ sont dans $\frac{1}{b}\mathbb{Z}$.*

Ainsi la collection des $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$ est dans $\tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$, par la proposition 2.1.10.

Remarque 2.1.13. Le prolongement des $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$ n'est pas arbitraire : on peut prolonger la valuation v à l'anneau $E[\![u^{\mathbb{R}_+}]\!]$ formé des séries formelles $\sum_{i\in I} a_i u^i$ où $I \subseteq \mathbb{R}_+$ est un monoïde de type fini. Cette valuation permet de prolonger $v : M' \to (\frac{1}{b}\mathbb{Z}\times[\![1,d]\!])\cup\{+\infty\}$ sur $E[\![u^{\mathbb{R}_+}]\!]\otimes_{E[\![u]\!]} M$. On prolonge également σ. On a alors pour $q \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = \sup_{x\in E[\![u^{\mathbb{R}_+}]\!]\otimes_{E[\![u]\!]} L^{F^{-1}\circ\alpha},\ v(x)=(q,i)} \sup\left\{n\in\mathbb{R}\ ;\ \sigma(x)\in u^n\left(E[\![u^{\mathbb{R}_+}]\!]\otimes_{E[\![u]\!]} L^\alpha\right)\right\},$$

voir [Car], p.17.

2.1.3 Les $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$ réordonnées

Il sera utile dans la suite de réordonner les $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$: si $L = (L^\alpha)_\alpha$ est une collection de réseaux, on note $\varphi_i^\alpha(L)$ les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ telles que pour tout $q\in\mathbb{R}$, les $\varphi_i^\alpha(L)(q)$ sont les $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)(q)$ triés par ordre décroissant. La collection des $\varphi_i^\alpha(L)$ vérifie alors les quatre points de la proposition 2.1.10 : les $\tilde{q}_i^\alpha(L)$ sont permutés (à α fixé) et les $\psi_j^\alpha(L)$, $\mu_j^\alpha(L)$ restent inchangés.

Donc la collection des $\varphi_i^\alpha(L)$ est dans $\Phi_{\mathbb{Z}}$ où :

Définition 2.1.14. *On note Φ l'ensemble des familles $\varphi = (\varphi_i^\alpha)_{(i,\alpha)\in[\![1,d]\!]\times S}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ telles que*

1. *pour tout* $\alpha \in S$, $\varphi_1^\alpha \geqslant \cdots \geqslant \varphi_d^\alpha$
2. *la famille* φ *est dans* $\tilde{\Phi}$.

Définition 2.1.15. *On note* $\Phi_{\mathbb{Z}}$ *le sous-ensemble de* Φ *composé des* φ *tels que*

(i) les q_i^α *sont dans* $\mathbb{Z}$

(ii) les points de discontinuité des φ_i^α *sont dans* $\frac{1}{b}\mathbb{Z}$.

Les données combinatoires qui forment l'ensemble Φ vont nous occuper longuement dans la suite. Un exemple typique est donné dans la figure 2.1 pour $d = 4$.

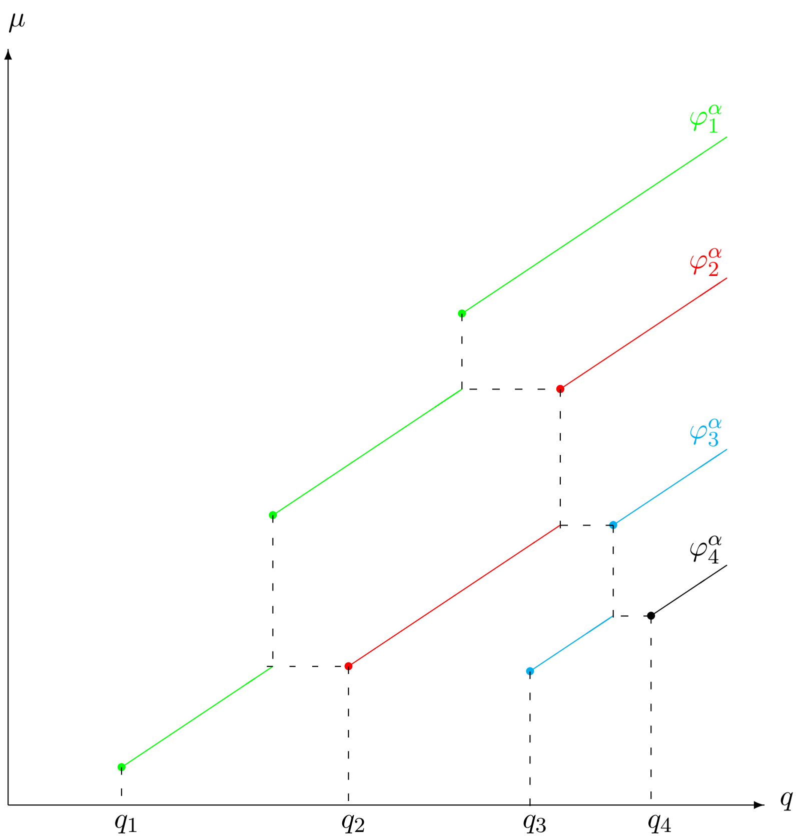

FIGURE 2.1 – Un exemple de donnée combinatoire.

Quelques propriétés des $\varphi \in \Phi$

Lemme 2.1.16. *Soient* $\varphi = (\varphi_i^\alpha) \in \Phi$, $q \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in S$. *On suppose qu'un des* $\varphi_i^\alpha(q)$ *est fini. Notons* $\mu_1 > \cdots > \mu_N$ $(N \geqslant 1)$ *les réels* μ *tels qu'il existe* i *vérifiant* $\varphi_i^\alpha(q) = \mu$. *Pour* $t \in [\![1, N]\!]$, *on pose*

$$E_t = \{i\ ; \varphi_i^\alpha(q) = \mu_t\} \text{ et } F_t = \{j\ ; \psi_j^\alpha(\mu_t) = q\},$$

donc $\#E_t = \#F_t$.
Alors il existe $\varepsilon > 0$ *tel que pour tous* $t \in [\![1, N]\!]$, $i \in E_t$, *et* $j \in F_t$, φ_i^α *et* ψ_j^α *induisent des bijections réciproques affines de* $[q, q + \varepsilon[$ *dans* $[\mu_t, \mu_t + b.\varepsilon[$.

Démonstration. Pour simplifier les notations on pose $\varphi_i = \varphi_i^\alpha$, $\psi_j = \psi_j^\alpha$, etc.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que tous les φ_i sont affines sur $[q, q+\varepsilon[$ ou valent identiquement $-\infty$ et tel que pour tout j, si $\psi_j^{-1}(q) = \emptyset$ alors $\psi_j^{-1}([q, q+\varepsilon[) = \emptyset$ (pour tout j un tel ε existe, sinon il existe une suite $(\alpha_n)_n$ de $\mathbb{R}$ tel que $(\psi_j(\alpha_n))_n$ est strictement décroissante et tend vers q, donc comme ψ_j est strictement croissante, on a (α_n) strict. décroissante et minorée donc convergente vers $\mu \in \mathbb{R}$, mais alors $\psi_j(\mu) = q$ par continuité à droite).
Soit également $\varepsilon' > 0$ tel que pour tout $t \in [\![1, N-1]\!]$, $\mu_{t+1} + \varepsilon' < \mu_t$.

Montrons que si $\delta > 0$ est tel que $\delta < \varepsilon$ et $b.\varepsilon < \varepsilon'$, alors pour tout $t \in [\![1, N]\!]$ et tout $j \in F_t$ on a $\psi_j(\mu_t + b.\delta) = q + \delta$. Cela implique le lemme.

On le fait par récurrence descendante sur t : soit $t \in [\![1, N]\!]$, on le suppose démontré pour les $t' > t$.

Prenons $j \notin F_t$. Si $\psi_j^{-1}(q) = \emptyset$, on a $\psi_j^{-1}(q+\delta) = \emptyset$ par choix de ε donc $\psi_j(\mu_t + b.\delta) \neq q + \delta$.

Sinon on a deux cas : $j \in F_{t'}$ avec $t' > t$ ou $t' < t$.
Si $t' > t$, on a $\psi_j(\mu_t + b.\delta) > \psi_j(\mu_{t'} + b.\delta) = q + \delta$ par l'hypothèse de récurrence.
Si $t' < t$, le choix de ε' assure que $\mu_t + b.\delta < \mu_{t'}$ d'où $\psi_j(\mu_t + b.\delta) < \psi_j(\mu_{t'}) = q < q + \delta$.

Ainsi on a
$$\{j ; \psi_j(\mu_t + b.\delta) = q + \delta\} \subseteq F_t$$
or ces ensembles ont même cardinal : soit $i \in E_N$, on a
$$\#\{j \ ; \psi_j(\mu_t + b.\delta) = q + \delta\} = \#\{i \ ; \underbrace{\varphi_i(q+\delta)}_{\varphi_i(q)+b.\delta} = \mu_t + b.\delta\} = \#E_t = \#F_t.$$

Donc ils sont égaux. □

Corollaire 2.1.17. *Soient $\varphi = (\varphi_i^\alpha) \in \Phi$ et $q \in \mathbb{R}$. On fixe $\alpha \in S$. On suppose qu'il existe i tel que $q > q_i^\alpha$. Notons $\mu_1 > \cdots > \mu_N$ ($N \geqslant 1$) les réels μ tels que $\left\{i \ ; \ \lim_{q' \lneq q} \varphi_i^\alpha(q') = \mu\right\} \neq \emptyset$. Pour $t \in [\![1, N]\!]$, on pose*
$$E_t = \{i \ ; \varphi_i^\alpha(q^-) = \mu_t\} \text{ et } F_t = \{j \ ; \psi_j^\alpha(\mu_t^-) = q\}.$$

Alors $\#E_t = \#F_t$ et si q' est minimal tel que tous les φ_i^α sont affines ou constantes égales à $-\infty$ sur $[q', q[$, on a pour tous t, $i \in E_t$ et $j \in F_t$, φ_i^α et ψ_j^α induisent des bijections réciproques affines de $[q', q[$ dans $[\mu_t - b(q - q'), \mu_t[$.

Démonstration. D'après le lemme 2.1.16 il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous t, $i \in E'_t$ et $j \in F'_t$, φ_i^α et ψ_j^α induisent des bijections réciproques affines de $[q', q' + \varepsilon[$ dans $[\mu_t, \mu_t + b.\varepsilon[$, avec
$$E'_t = \{i \ ; \varphi_i^\alpha(q') = \mu_t - b(q - q')\} \text{ et } F'_t = \{j \ ; \psi_j^\alpha(\mu_t - b(q - q')) = q'\}.$$

On a donc le résultat puisque les φ_i^α sont affines sur $[q', q[$. □

Corollaire 2.1.18. *Soit $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}$. Alors les ψ_j^α associées ne sont pas identiquement $-\infty$, atteignent $-\infty$ et sont affines par morceaux (avec un nombre fini de points de discontinuité) de pente $\frac{1}{b}$ là où elles sont finies.*

Démonstration. Notons $\varphi = (\varphi_i^\alpha)$ le réordonnement des $\tilde{\varphi}_i^\alpha$. Les fonctions associées à φ sont encore les ψ_j^α associées à $\tilde{\varphi}$, on est donc ramené à montrer le corollaire dans le cas $\tilde{\varphi} = \varphi \in \Phi$.

On fixe $\alpha \in S$. Pour q grand on a $\varphi_i^\alpha(q) = bq - q_i^{F\circ\alpha}$ donc pour μ grand on a

$$d = \sum_{q\in\mathbb{R}} \#\{i\ ;\ \varphi_i^\alpha(q) = \mu\} = \sum_{q\in\mathbb{R}} \#\{j\ ;\ \psi_j^\alpha(\mu) = q\} = \#\{j\ ;\ \psi_j^\alpha(\mu) > -\infty\}$$

d'où le premier point.

Pour le deuxième point on prend μ assez petit pour que $\sum_{q\in\mathbb{R}} \#\{i\ ;\ \varphi_i^\alpha(q) = \mu\} = 0$.

Maintenant si $\psi_j^\alpha(\mu) > -\infty$ pour $\mu \in \mathbb{R}$, on note $q = \psi_j^\alpha(\mu)$ et d'après le lemme 2.1.16 il existe $\varepsilon > 0$ et i tels que φ_i^α est affine sur $[q, q+\varepsilon[$ de bijection réciproque ψ_j^α, donc $\psi_j^\alpha|_{[\mu,\mu+b\varepsilon[}$ est affine de pente $\frac{1}{b}$.
On vérifie que pour μ grand on a ψ_j^α affine sur $[\mu, +\infty[$. Il reste à montrer que les points de discontinuité sont en nombre fini. Par l'absurde : sinon il existe une suite strictement décroissante $(x_n)_n$ de points de discontinuité, minorée donc convergente vers un réel $\mu \in \mathbb{R}$ avec $\psi_j^\alpha(\mu) > -\infty$. C'est contradictoire car ψ_j^α est affine sur un intervalle non-vide de la forme $[\mu, \mu'[$. □

Lemme 2.1.19. *Soient $(\varphi_i^\alpha) \in \Phi$, $i \in [\![1, d]\!]$, $\alpha \in S$ et $q_0 \in \mathbb{R}$. On suppose φ_i^α discontinue en q_0 et $q_0 > q_i^\alpha$, alors il existe $i' > i$ et $q' \geqslant q_0$ tels que $\varphi_{i'}^\alpha(q') = \lim_{q \xrightarrow{<} q_0} \varphi_i^\alpha(q)$ et $\varphi_{i'}^\alpha$ soit discontinue en q' (donc éventuellement $q' = q_{i'}^\alpha$).*

Démonstration. Géométriquement la situation est la suivante :

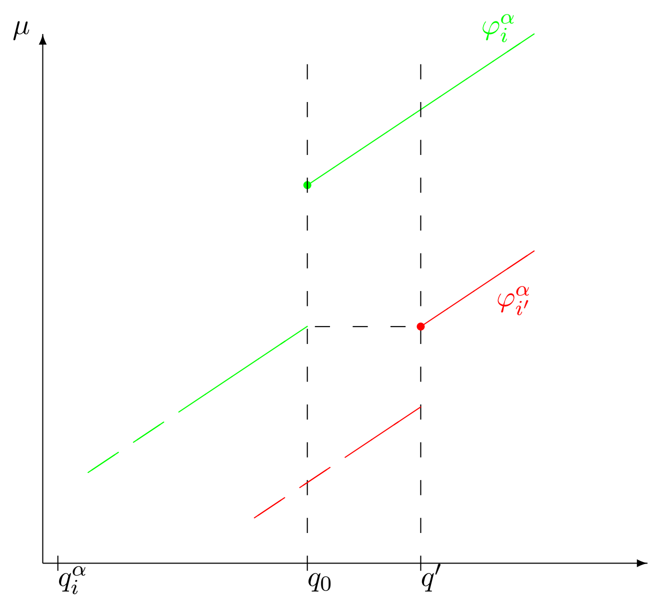

FIGURE 2.2 – La situation considérée

On note encore $\varphi_i = \varphi_i^\alpha$. On va comparer les cardinaux pour ε petit de

$$A = \{i'\ ;\ \exists q \geqslant q_0,\ \varphi_{i'}(q) = \mu\}$$

et

$$B = \{i'\ ;\ \exists q \geqslant q_0,\ \varphi_{i'}(q - \varepsilon) = \mu - b\varepsilon\}$$

où $\mu = \varphi_i(q_0^-)$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\forall i' \in A$, $\varphi_{i'}|_{[q-\varepsilon,q[}$ est soit affine, soit $\equiv -\infty$ (avec q tel que $\varphi_{i'}(q) = \mu$). On a

$$\begin{aligned}
\#A &= \sum_{q \geqslant q_0} \#\{i' \ ; \ \varphi_{i'}(q) = \mu\} \\
&= \sum_{q \geqslant q_0} \#\{j' \ ; \ \psi_{j'}(\mu) = q\} \\
&= \#\underbrace{\{j' \ ; \ \psi_{j'}(\mu) \geqslant q_0\}}_{A'}
\end{aligned}$$

et de même

$$\#B = \#\underbrace{\{j' \ ; \ \psi_{j'}(\mu - b\varepsilon) \geqslant q_0 - \varepsilon\}}_{B'}$$

or $B' \subseteq A'$ puisque (corollaire 2.1.18) les $\psi_{j'}$ sont affines par morceaux de pente $\frac{1}{b}$. Donc $\#A \geqslant \#B$. On a $i \in B$ donc $A \neq \varnothing$.

Supposons par l'absurde que

$$\forall i' > i, \forall q \geqslant q_0, (\varphi_{i'}(q) = \mu) \Longrightarrow (\varphi_{i'} \text{ continue en } q).$$

Alors si $i' \in A$ et q est tel que $\varphi_{i'}(q) = \mu$, on a $\varphi_{i'}$ affine sur $[q-\varepsilon, q]$, d'où $\varphi_{i'}(q-\varepsilon) = \mu - b\varepsilon$, ainsi $i' \in B$. Donc $A \subseteq B$, or $i \in B \backslash A$. On a donc $\#A < \#B$, contradiction. □

Corollaire 2.1.20. *Si $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, alors $\forall i$, $\forall \alpha \in S$ on a $(\varphi_i^\alpha)^{-1}(\mathbb{Z}) = \frac{1}{b}\mathbb{Z} \cap [q_i^\alpha, +\infty[$.*

Démonstration. On fixe $\alpha \in S$, et on démontre le résultat par récurrence descendante sur i.

Soit donc $i \in [\![1, d]\!]$ et supposons le résultat démontré pour $i' > i$. Notons $a_1 < \cdots < a_l$ les points de discontinuité de φ_i^α. On sait que si $q \geqslant a_l$, on a $\varphi_i^\alpha(q) = bq - \underbrace{q_i^{F\circ\alpha}}_{\in\mathbb{Z}}$, donc $\varphi_i^\alpha(q) \in \mathbb{Z}$ ssi $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$.
Maintenant si $2 \leqslant s \leqslant l$ et si on suppose que pour $q \geqslant a_s$ on a $\varphi_i^\alpha(q) \in \mathbb{Z}$ ssi $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$, d'après le lemme 2.1.19, il existe $i' > i$ et $q_1 \geqslant a_s$ tels que

$$\begin{cases} \varphi_{i'}^\alpha(q_1) = \varphi_i^\alpha(a_s^-) \\ \varphi_{i'}^\alpha \text{ est discontinue en } q_1. \end{cases}$$

En particulier $q_1 \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$. Ainsi si $q \in [a_{s-1}, a_s[$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_i^\alpha(q) &= \varphi_i^\alpha\left(a_s - \frac{1}{b}\right) + b\left(q - a_s + \frac{1}{b}\right) \\
&= \varphi_i^\alpha(a_s^-) + b(q - a_s) \\
&= \underbrace{\varphi_{i'}^\alpha(q_1)}_{\in\mathbb{Z}} + b(q - \underbrace{a_s}_{\in\frac{1}{b}\mathbb{Z}})
\end{aligned}$$

donc $\varphi_i^\alpha(q) \in \mathbb{Z}$ ssi $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$. □

Remarque 2.1.21. Si $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, les $\mu_j^\alpha(\varphi)$ associés sont des entiers : la fonction $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{N}, \mu \mapsto \#\{j \in [\![1,d]\!] \ ; \ \mu \geqslant \mu_j^\alpha(\varphi)\}$ a pour points de discontinuité les μ_j^α. Mais on a $\ell(\mu) = \#\{i \ ; \ \exists q \in \mathbb{R}, \varphi^\alpha(q) = \mu\}$, donc les points de discontinuité de ℓ sont dans $\mathbb{Z}$ (on utilise le corollaire 2.1.20).

Corollaire 2.1.22. *Si $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$, les ψ_j^α associées ont leurs points de discontinuité dans $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Remplacer $\tilde{\varphi}$ par son réordonnement φ ne change pas les fonctions ψ_j^α associées, on peut donc supposer $\tilde{\varphi} = \varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$.

Soit $\mu \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. On souhaite montrer que les ψ_j^α sont continues en μ. Notons $x_1 < \cdots < x_s$ les valeurs finies de $\psi_1^\alpha, \ldots, \psi_d^\alpha$ en μ et $e_1, \ldots, e_s$ les multiplicités. Alors pour $1 \leqslant t \leqslant s$, l'ensemble $E_t = \{i \ ; \ \varphi_i^\alpha(x_t) = \mu\}$ est non-vide, ce qui implique $x_t \notin \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ par le corollaire 2.1.20.

L'idée est qu'en perturbant μ en rajoutant δ petit en valeur absolue, la situation ne va pas changer : les fonctions φ_i^α pour les indices i appartenant à l'un des E_t sont continues en x_t, et on a alors $\varphi_i^\alpha(x_t + \frac{\delta}{b}) = \mu + \delta$, tandis que pour les indices i vérifiant $\mu \notin \varphi_i^\alpha(\mathbb{R})$, on aura encore $\mu + \delta \notin \varphi_i^\alpha(\mathbb{R})$.
Vérifions cette dernière affirmation : supposons $\mu \notin \varphi_i^\alpha(\mathbb{R})$. Si $\mu < \varphi_i^\alpha(q_i^\alpha)$, c'est terminé. Sinon il existe un point de discontinuité $q_0 > q_i^\alpha$ de φ_i^α tel que $\varphi_i^\alpha(q_0^-) \leqslant \mu < \varphi_i^\alpha(q_0)$. Or par le lemme 2.1.19 il existe i' et $q' \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi_{i'}^\alpha(q') = \varphi_i^\alpha(q_0^-)$ avec $\varphi_{i'}^\alpha$ discontinue en q'. Donc $q' \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ et ainsi $\varphi_i^\alpha(q_0^-) \in \mathbb{Z}$, ce qui empêche l'égalité $\mu = \varphi_i^\alpha(q_0^-)$.

Pour δ petit les valeurs finies de $\psi_1^\alpha, \ldots, \psi_d^\alpha$ en $\mu + \delta$ sont donc $x_1 + \frac{\delta}{b} < \cdots < x_s + \frac{\delta}{b}$, ces valeurs étant prises avec multiplicités $e_1, \ldots, e_s$. Cela assure la continuité des ψ_j^α en μ. □

Proposition 2.1.23. *Soit $\varphi = (\varphi_i^\alpha) \in \Phi$. Si $d \geqslant 2$, on pose ${\varphi'}_i^\alpha = \varphi_{i+1}^\alpha$ pour $i \in [\![1, d-1]\!]$. Alors $\varphi' \in \Phi$.*

Démonstration. Les trois premiers points de la définition de Φ sont clairs.
Pour le quatrième point on fixe α et on note $\varphi_i = \varphi_i^\alpha$.
Soient $\psi'_1 \leqslant \cdots \leqslant \psi'_{d-1}$ les fonctions telles que $\forall (q, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\#\{i \ ; \ \varphi_i(q) = \mu\} = \#\{j \ ; \ \psi_j(\mu) = q\}.$$

Montrons d'abord que les ψ'_j sont croissantes : si $\mu \in \mathbb{R}$, notons $x_1 < \cdots < x_l$ les réels tels que $\{i \ ; \ \varphi_i(x) = \mu\} \neq \varnothing$. On pose $e_s = \#\{i \ ; \ \varphi_i(x_s) = \mu\}$. Les $\psi_j(\mu)$ valent $-\infty, x_1, \ldots, x_l$ avec multiplicité $d - \sum_s e_s, e_1, \ldots, e_l$. Ainsi les $\psi'_j(\mu)$ sont les nombres $-\infty, x_1, \ldots, x_l$ avec multiplicité $d - 1 - \sum_s e_s, e_1, \ldots, e_l$ si $\mu \notin \varphi_1(\mathbb{R})$, et multiplicité $d - \sum_s e_s, e_1 - 1, e_2, \ldots, e_l$ si $\mu \in \varphi_1(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\psi'_j(\mu) = \begin{cases} \psi_{j+1}(\mu) & \text{si } \mu \notin \varphi_1(\mathbb{R}) \\ \psi_{j+1}(\mu) & \text{si } \mu \in \varphi_1(\mathbb{R}) \text{ et } j \geqslant d + 1 - \sum_s e_s \\ -\infty & \text{si } \mu \in \varphi_1(\mathbb{R}) \text{ et } j \leqslant d - \sum_s e_s \end{cases}.$$

Soit $\mu' > \mu$. On note $x'_1 < \cdots < x'_{l'}, e'_1, \ldots, e'_{l'}$ les nombres correspondant à μ'. On sait que $\sum_{s'} e'_{s'} \geqslant \sum_s e_s$, donc on a bien $\psi'_j(\mu) \leqslant \psi'_j(\mu')$.

La description précédente montre également que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que pour tout j, $\psi'_j|_{[\mu,\mu+\varepsilon[} = \psi_{j+1}|_{[\mu,\mu+\varepsilon[}$ ou $\psi'_j|_{[\mu,\mu+\varepsilon[} \equiv -\infty$. Ainsi les ψ'_j vérifient le point *(4)* de la définition 2.1.14. □

2.1.4 La stratification induite

On reprend les notations de la sous-section 1.1.1.

Définition 2.1.24. *Soit $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}$. Notons ψ_j^α les fonctions associées à $\tilde{\varphi}$. Pour $\alpha \in S$ et $j \in [\![1, d]\!]$ on note $\mu_j^\alpha(\tilde{\varphi})$ l'unique réel tel que $(\psi_j^\alpha)^{-1}(\mathbb{R}) = [\mu_j^\alpha(\tilde{\varphi}), +\infty[$. Un tel réel existe par le corollaire 2.1.18.*
On note $\mu(\tilde{\varphi})$ la famille des $\mu_j^\alpha(\tilde{\varphi})$.

Remarque 2.1.25. Si on prend $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$, la condition d'intégrité assure (corollaire 2.1.22) que les $\mu_j^\alpha(\varphi)$ sont des entiers relatifs.
Lorsque $\tilde{\varphi}$ provient d'une collection $L = (L^\alpha)$ de réseaux, ce fait était déjà connu : par la proposition 2.1.10 pour tout $\alpha \in S$ on a $(\mu_1^\alpha(\tilde{\varphi}), \dots, \mu_d^\alpha(\tilde{\varphi})) = \operatorname{div}\left(\sigma\left(\sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})\right)/L^\alpha\right)$.
En particulier si $\tilde{\varphi}$ est fixé, l'ensemble des collections L telles que $\tilde{\varphi}(L) = \tilde{\varphi}$ est inclus (corollaire 1.2.2) dans $\prod_\alpha Grass_d^N(E)$ pour N assez grand.

Proposition 2.1.26. *On considère $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$. Soit $N \geqslant 0$ assez grand pour que l'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}(E)$ des collections L de réseaux vérifiant $\tilde{\varphi}(L) = \tilde{\varphi}$ soit inclus dans $\prod_\alpha Grass_d^N(E)$. Pour tout $\alpha \in S$, soient $r^\alpha \in [\![-Nd, Nd]\!]$ et $I^\alpha \subseteq F = [\![1, d]\!] \times [\![-N, N[\![$ sous-saturé de cardinal $Nd + r^\alpha$.*
Alors l'ensemble des éléments L de $\prod_{\alpha\in S} \mathcal{L}att_d^{r^\alpha,N,I^\alpha}(E)$ vérifiant $\tilde{\varphi}(L) = \tilde{\varphi}$ est localement fermé dans $\prod_{\alpha\in S} \mathcal{L}att_d^{r^\alpha,N,I^\alpha}(E)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour un $\alpha \in S$ fixé, l'ensemble

$$\left\{L = (L^\alpha, L^{\alpha_1}) \in \mathcal{L}att_d^{r^\alpha,N,I^\alpha}(E) \times \mathcal{L}att_d^{r^{\alpha_1},N,I^{\alpha_1}}(E)\ ;\ \forall i \in [\![1, d]\!], \tilde{\varphi}_i^\alpha(L) = \tilde{\varphi}_i^\alpha\right\}$$

est localement fermé dans $\mathcal{L}att_d^{r^\alpha,N,I^\alpha}(E) \times \mathcal{L}att_d^{r^{\alpha_1},N,I^{\alpha_1}}(E)$, où on a posé $\alpha_1 = F^{-1} \circ \alpha$.
On considère pour $\beta \in \{\alpha, \alpha_1\}$ l'isomorphisme $\mathcal{L}att_d^{r^\beta,N,I^\beta}(E) \xrightarrow{\pi} G_{r^\beta}^{u,I^\beta}(E)$ (voir la démonstration de la proposition 1.2.3). Pour tout $L^\beta \in \mathcal{L}att_d^{r^\beta,N,I^\beta}(E)$, une base de L^β est $(b_i^\beta)_{1\leqslant i\leqslant d}$ avec

$$b_i^\beta = \begin{cases} u^j e_i + \sum_{(i',j')\in I^\beta} a^\beta_{i,j,i',j'} u^{j'} e_{i'} & \text{si } j = \inf\{j_0\ ;\ (i, j_0) \in F\backslash I^\beta\} < +\infty \\ u^N e_i & \text{sinon} \end{cases}$$

où $(a^\beta_{s,l})_{(s,l)\in I^\beta\times F\backslash I^\beta} = \pi(L^\beta) \in G_{r^\beta}^{u,I^\beta}(E)$. On note $\mathcal{B}^\beta(L^\beta)$ cette base, $\mathcal{C} = (e_i)_i$ la base canonique de $E(\!(u)\!)^d$. Les coefficients de la matrice de passage $P^\beta = P_{\mathcal{B}^\beta(L^\beta),\mathcal{C}}$ sont donc de la forme $\sum_{s\in\mathbb{Z}} P_s^{\beta,i,j}(\pi(L^\beta)).u^s$, où les $P_s^{\beta,i,j}$ sont des polynômes de $E[(A_{s,l})_{(s,l)\in I^\beta\times F\backslash I^\beta}]$.

Pour $x = (\sum_{s'\in\frac{1}{b}\mathbb{Z}} x_{j,s'}.u^{s'})_{1\leqslant j\leqslant d} \in M'$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a en notant $a = (\pi(L^\alpha), \pi(L^{\alpha_1}))$,

$$\begin{aligned}
x \in L^\alpha_{\geqslant n} &\iff x \in \sigma^*(L^{\alpha_1}) \text{ et } \sigma(x) \in u^n L^\alpha && (2.1)\\
&\iff P^{\alpha_1}(a).x \in E[\![u^{1/b}]\!]^d \text{ et } P^\alpha(a).\sigma(x) \in u^n E[\![u]\!]^d && (2.2)\\
&\iff \sigma(P^{\alpha_1})(a).\sigma(x) \in E[\![u]\!]^d \text{ et } P^\alpha(a).\sigma(x) \in u^n E[\![u]\!]^d && (2.3)\\
&\iff \forall i \in [\![1, d]\!], \begin{cases} \forall t < 0, \sum_{s'\in\mathbb{Z},1\leqslant j\leqslant d} \sigma(P^{\alpha_1,i,j}_{t-s'})(a).(x_{j,s'/b})^{p^h} = 0 \\ \forall t < n, \sum_{s'\in\mathbb{Z},1\leqslant j\leqslant d} P^{\alpha,i,j}_{t-s'}(a).(x_{j,s'/b})^{p^h} = 0 \end{cases} && (2.4)\\
&\iff \sum_{\substack{s'\in\mathbb{Z}\\ 1\leqslant j\leqslant d}} (x_{j,s'/b})^{p^h}.C^n_{s',j}(a) = 0 && (2.5)
\end{aligned}$$

les vecteurs colonnes $C^n_{s',j}(a) = \left(C^n_{s',j,t,i}(a)\right)_{t,i} \in E^{((\mathbb{Z}_{<0}\sqcup\mathbb{Z}_{<n})\times[\![1,d]\!])}$ étant définis par $C^n_{s',j,t,i}(a) = \sigma(P^{\alpha_1,i,j}_{t-s'})(a)$ si $t \in \mathbb{Z}_{<0}$ et $C^n_{s',j,t,i}(a) = P^{\alpha,i,j}_{t-s'}(a)$ si $t \in \mathbb{Z}_{<n}$.

Pour n et (s', j) fixés, les $C^n_{s',j,t,i}(a)$ sont presque tous nuls : si a correspond à $L = (L^\alpha, L^{\alpha_1}) \in \mathcal{L}att^{r^\alpha,N,I^\alpha}_d(E) \times \mathcal{L}att^{r^{\alpha_1},N,I^{\alpha_1}}_d(E)$, les vecteurs des bases $\mathcal{B}^\beta(L^\beta)$ sont de valuation supérieure à $-N$. Ainsi, en utilisant la formule de la comatrice on vérifie que les coefficients des matrices $P^\beta(a)$ sont de valuation supérieure à $-N(d-1) - r^\beta$ (on a $\det L^\beta$ de valuation r^β). Soit $m = -N(d-1) - \max(r^\alpha, r^{\alpha_1})$, alors les $P^{\beta,i,j}_s$ sont nuls pour $s < m$.
Si $(q, i) \in \mathbb{Z}\times[\![1, d]\!]$, soit $V^n_{(q,i)}(a)$ l'espace vectoriel engendré par les $C^n_{s',j}(a)$ pour $(s', j) > (q, i)$. Ce qui précède montre que $V^n_{(q,i)}(a) = \{0\}$ pour $\max(n, 0) - q \leqslant m$. Or si on écrit (q', i') pour le couple « suivant » (q, i) pour l'ordre lexicographique, on a $\dim_E(V^n_{(q,i)}(a)/V^n_{(q',i')}(a)) \leqslant 1$. En particulier tous les $V^n_{(q,i)}(a)$ sont de dimension finie.

On obtient à partir de (2.5) les équivalences suivantes pour $(q, i) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times [\![1, d]\!]$: $\tilde{\varphi}^\alpha_i(L)(q) \geqslant n$ ssi il existe $x \in L^\alpha_{\geqslant n}$ de valuation (q, i) ssi $C^n_{bq,i}(a)$ est dans l'espace vectoriel engendré par les $C^n_{s',j}(a)$ pour $(s', j) > (bq, i)$ ssi $\dim(V^n_{(q',i')}) = \dim(V^n_{(bq,i)})$ où (q', i') est le couple précédant (bq, i).

Pour $m'_0 \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ assez grand les fonctions $\tilde{\varphi}^\alpha_i|_{[m'_0,+\infty[}$ sont affines de pente b, donc il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $m_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $\tilde{\varphi}^\alpha_i(q/b) \geqslant n$ pour q et n vérifiant $\max(n - n_0, 0) - q \leqslant m_0$. Quitte à augmenter m_0 et diminuer n_0 on peut supposer que le domaine $\max(n, 0) - q \leqslant m$ contient le domaine $\mathcal{M}_0$ donné par $\max(n - n_0, 0) - q \leqslant m_0$.
Définissons une fonction $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\tilde{\varphi}}$ de $\mathbb{Z} \times [\![1, d]\!] \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante : pour $n \in \mathbb{Z}$ fixé on pose $\mathcal{D}(q, i, n) = 0$ si q est assez grand pour que $\max(n - n_0, 0) - q \leqslant m_0$, et on définit ensuite les $\mathcal{D}(q, i, n)$ pour $q < \max(n - n_0, 0) - m_0$ par récurrence descendante sur (q, i), en appelant (q', i') le couple précédant (q, i), puis en posant $\mathcal{D}(q', i', n) = \mathcal{D}(q, i, n)$ si $\tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q/b) \geqslant n$, $\mathcal{D}(q', i', n) = \mathcal{D}(q, i, n) + 1$ sinon. Par construction pour tout triplet (q, i, n) on a donc $\mathcal{D}((q', i'), n) = \mathcal{D}(q, i, n)$ ssi $\tilde{\varphi}^\alpha_i(q/b) \geqslant n$.

Dans la suite de la preuve pour (q, i) un couple, (q', i') désigne toujours le couple le précédant.
Si $L \in \mathcal{L}att^{r^\alpha,N,I^\alpha}_d(E) \times \mathcal{L}att^{r^{\alpha_1},N,I^{\alpha_1}}_d(E)$, on a

$$\tilde{\varphi}^\alpha(L) = \tilde{\varphi}^\alpha \iff \forall (q, i) \in \mathbb{Z} \times [\![1, d]\!], \forall n \in \mathbb{Z}, \dim(V^n_{(q,i)}(a)) = \mathcal{D}(q, i, n). \tag{2.6}$$

En effet les nombres $\dim(V^n_{(q,i)}(a))$ et $\mathcal{D}(q, i, n)$ coïncident pour $(q, n) \in \mathcal{M}_0$, et le saut de dimension éventuel entre $\dim(V^n_{(q',i')}(a))$ et $\dim(V^n_{(q,i)}(a))$ (respectivement le saut entre $\mathcal{D}(q', i', n)$ et $\mathcal{D}(q, i, n)$) est contrôlé par la condition $\tilde{\varphi}^\alpha_i(L)(q/b) \geqslant n$ (respectivement par la condition $\tilde{\varphi}^\alpha_i(q/b) \geqslant n$).

On termine en vérifiant que la condition donnée dans le second membre de (2.6) est bien localement fermée. Pour cela on vérifie (i) qu'il suffit de demander l'égalité $\dim(V^n_{(q,i)}(a)) = \mathcal{D}(q, i, n)$ pour un nombre fini de (q, i, n) et (ii) qu'en supposant $\dim(V^n_{(q,i)}(a)) = \mathcal{D}(q, i, n)$ pour un triplet (q, i, n) la condition $\dim(V^n_{(q',i')}(a)) = \mathcal{D}(q', i', n)$ est localement fermée.
La preuve du point (ii) de la proposition 2.1.10 montre que pour $L \in \mathcal{L}att^{r^\alpha,N,I^\alpha}_d(E) \times \mathcal{L}att^{r^{\alpha_1},N,I^{\alpha_1}}_d(E)$ on a $\tilde{\varphi}^\alpha_i(L)(q) = bq - \tilde{q}^{F\circ\alpha}_i$ pour $q \geqslant N$. Ainsi quitte à augmenter m_0 on peut supposer que les $\tilde{\varphi}^\alpha_i(L)$ et les $\tilde{\varphi}^\alpha_i$ sont affines sur $[m_0/b, +\infty[$. On sait aussi que $\tilde{\varphi}^\alpha_i(L)(q) \leqslant bq - \tilde{q}^{F\circ\alpha}_i$ pour tout (q, i), donc il existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout (q, i) avec

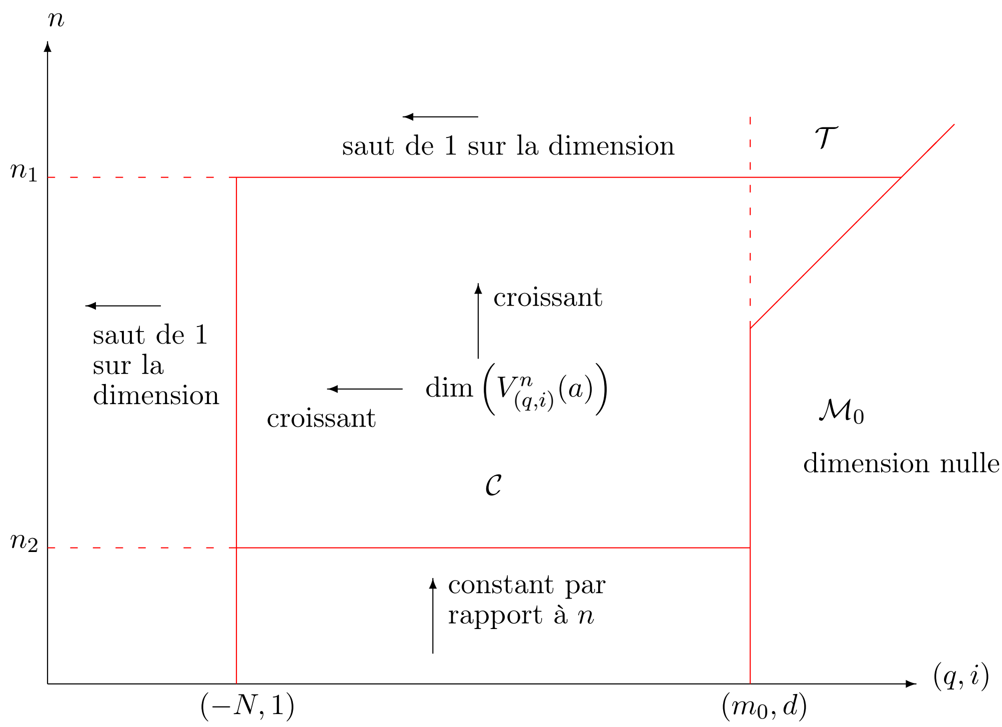

FIGURE 2.3 – Le domaine fini considéré.

$-N \leqslant q \leqslant m_0$ on ait $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)(q) < n_1$ et $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) < n_1$, voir la figure 2.3.
Pour $q < -N$ on a $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)(q) = -\infty$ et $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = -\infty$ (on utilise le fait qu'il existe L vérifiant $\tilde{\varphi}^\alpha(L) = \tilde{\varphi}^\alpha$ pour la deuxième égalité, dans le cas contraire la proposition est évidente). Enfin vu la définition des $C^n_{s',j}$, il existe $n_2 \in \mathbb{Z}$ tel que pour (q,i) vérifiant $-N \leqslant q \leqslant m_0$ les espaces $V^n_{(q,i)}$ soient indépendants de n pour $n \leqslant n_2$, et on peut demander que (toujours pour $-N \leqslant q \leqslant m_0$) pour $n, n' \leqslant n_2$ on ait $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q/b) \geqslant n$ ssi $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q/b) \geqslant n'$. On a donc la situation décrite dans la figure 2.3 où les affirmations entourant le domaine central $\mathcal{C}$ sont vérifiées par les nombres $\dim(V^n_{(q,i)}(a))$ et $\mathcal{D}(q,i,n)$. Il suffit donc d'avoir les égalités $\dim(V^n_{(q,i)}(a)) = \mathcal{D}(q,i,n)$ dans le domaine $\mathcal{C}$ pour les avoir partout : pour écrire la condition $\dim(V^n_{(q,i)}(a)) = \mathcal{D}(q,i,n)$ on part des égalités pour les (q,n) dans $\mathcal{M}_0$, $n \in [\![n_2, n_1]\!]$ puisque dans ce cas il n'y a rien à vérifier. Ensuite on propage les égalités par récurrence descendante sur (q,i) au domaine $\mathcal{C}$. Le domaine $\mathcal{T}$ ne pose pas problème car les égalités dans $\mathcal{C}$ assurent que les $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)$ et les $\tilde{\varphi}_i^\alpha$, affines sur $[m_0/b, +\infty[$, sont égales sur cet intervalle. Cela répond au point (i).
Pour le point (ii) vu l'ordre dans lequel on traite les égalités on a toujours une condition du type $\dim(V^n_{(q',i')}(a)) = \mathcal{D}(q',i',n)$ à tester en ayant déjà fixé la dimension de $V^n_{(q,i)}(a)$. Or $V^n_{(q',i')}(a)$ est la somme de l'espace vectoriel engendré par le vecteur $C^n_{q,i}$ et de $V^n_{(q,i)}(a)$ et l'appartenance du vecteur $C^n_{q,i}$ à $V^n_{(q,i)}(a)$ est une condition d'annulation de mineurs d'une certaine taille, et est donc une condition fermée. □

Corollaire 2.1.27. *Soient $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_\mathbb{Z}$ et $N \geqslant 0$ assez grand pour que l'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}(E)$ des collections L de réseaux vérifiant $\tilde{\varphi}(L) = \tilde{\varphi}$ soit inclus dans $\prod_\alpha Grass_d^N(E)$. Alors $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}(E)$ est une partie localement fermée de $\prod_\alpha Grass_d^N(E)$.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 2.1.26 ci-dessus. □

On est maintenant en mesure de définir les variétés $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ et $\mathcal{X}_\varphi$ qui vont stratifier les variétés de Kisin $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$.

Définition 2.1.28. *Soit $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$ et $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$ son réordonnement. Notons $\mu = (\mu_j^\alpha(\varphi))$ les entiers associés à φ et soit $N \geqslant 0$ tel que $\mathcal{X}_\mu \subseteq \prod_\alpha Grass_d^N$. On définit $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ comme le sous-schéma réduit de $\prod_\alpha Grass_d^N$ dont les E-points sont $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}(E)$, ce qui a un sens par le corollaire 2.1.27.*
Pour $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, on définit le E-schéma $\mathcal{X}_\varphi$ comme la réunion disjointe des $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ sur les $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$ redonnant φ après réordonnement.

Remarque 2.1.29. Pour une donnée $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, il n'existe qu'un nombre fini de $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$ redonnant φ après réordonnement. En effet il existe $q_0 \geqslant q_1$ appartenant à $\frac{1}{b}\mathbb{Z}$ tels que pour $q < q_0$ tous les $\varphi_i^\alpha(q)$ valent $-\infty$ et tels que tous les φ_i^α sont affines sur $[q_1, +\infty[$. Par croissance des $\tilde{\varphi}_i^\alpha$, pour tout α il existe une permutation $\sigma^\alpha \in \mathfrak{S}_d$ telle que $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = \varphi_{\sigma^\alpha(i)}^\alpha(q)$ pour $q \geqslant q_1$. Il reste alors un nombre fini de valeurs $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \cap [q_0, q_1[$ pour lesquelles les nombres $\tilde{\varphi}_1^\alpha(q), \ldots, \tilde{\varphi}_d^\alpha(q)$ sont les nombres $\varphi_1^\alpha(q), \ldots, \varphi_d^\alpha(q)$ pris avec multiplicités. Notons $\varphi(\tilde{\varphi})$ le réordonnement d'une donnée combinatoire $\tilde{\varphi}$. On a bien $\#\left\{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}} \ ; \ \varphi(\tilde{\varphi}) = \varphi\right\} < +\infty$.

Remarque 2.1.30. Par définition pour $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$ on a $\dim(\mathcal{X}_\varphi) = \sup_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}, \varphi(\tilde{\varphi}) = \varphi} \dim\left(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}\right)$. Mais si $\mu \in \mathbb{Z}^{S \times [\![1,d]\!]}$ est dominant, on a

$$\mathcal{X}_\mu(E) = \bigcup_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}, \mu(\tilde{\varphi}) = \mu} \tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}(E)$$

or les variétés que l'on considèrent sont réduites de type fini sur E, donc

$$\dim(\mathcal{X}_\mu) = \sup_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}, \mu(\tilde{\varphi}) = \mu} \dim\left(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}\right)$$

et finalement $\dim(\mathcal{X}_\mu) = \sup_{\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}, \mu(\varphi) = \mu} \dim(\mathcal{X}_\varphi)$. Dans la suite on estime $\dim(\mathcal{X}_\varphi)$ afin d'estimer $\dim(\mathcal{X}_\mu)$ et $\dim(\mathcal{X}_{\leqslant \mu})$.

2.2 Un encadrement de la dimension des strates

Dans cette section on donne un encadrement de la dimension des strates $\mathcal{X}_\varphi$. On fixe donc pour toute la section un élément $\varphi = (\varphi^\alpha)_{\alpha \in S} \in \Phi_{\mathbb{Z}}$ et on considère des données combinatoires $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}^\alpha)_\alpha \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$ redonnant φ après réordonnement.

L'idée est la suivante : si $L = (L^\alpha)_\alpha$ est une collection de réseaux de $E((u))^d$ et $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(L)$, pour $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ on a par définition

$$\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = \sup_{x \in \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha}), v(x) = (q,i)} \sup\{n \in \mathbb{Z} \ ; \ \sigma(x) \in u^n L^\alpha\}$$

donc si $q \geqslant \tilde{q}_i^\alpha$ on peut choisir $v_{q,i}^\alpha \in \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})$ de valuation (q,i) et réalisant le sup de $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)$, *i.e.* tel que $\sigma(v_{q,i}^\alpha) \in u^{\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)} L^\alpha$. On peut demander que pour $q > \tilde{q}_i^\alpha$ on ait

$$v_{q,i}^\alpha = u^{1/b}.v_{q-\frac{1}{b},i}^\alpha + \sum_{(q',i') > (q,i)} a_{q,i,q',i'}^\alpha . v_{q',i'}^\alpha$$

pour des coefficients $a_{q,i,q',i'}^\alpha \in E$. Il se trouve qu'on peut prendre $a_{q,i,q',i'}^\alpha = 0$ pour $(q',i') \notin \tilde{A}^\alpha(q,i) = \left\{(q',i') > (q,i) \ ; \ \tilde{\varphi}_i^\alpha\left(q - \frac{1}{b}\right) < \tilde{\varphi}_{i'}^\alpha(q') < \tilde{\varphi}_i^\alpha(q)\right\}$, qui est un ensemble fini.
On rajoute une relation supplémentaire sur les $v_{q,i}^\alpha$ traduisant le fait que $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = bq - \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$ pour q grand, ce qui rajoute des coefficients $a_{q,i,q',i'}^\alpha$.
Les points de $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ sont alors essentiellement paramétrés par les $a_{q,i,q',i'}^\alpha$, indicés par l'ensemble $\coprod_\alpha \coprod_{(q,i)} \tilde{A}^\alpha(q,i)$.

2.2.1 Obtention de la majoration

On fixe $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$ dans cette sous-section, redonnant φ après réordonnement. Pour $\alpha \in S$ on pose $\tilde{V}^{\alpha} = \{(q,i) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times [\![1,d]\!] \ ; \ q \geqslant \tilde{q}_i^{\alpha}\}$.

Définition 2.2.1. *Pour tous $\alpha \in S$ et $(q,i) \in Q = \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times [\![1,d]\!]$ on pose*

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{\alpha}(q,i) &= \left\{(q',i') > (q,i) \ ; \ \tilde{\varphi}_i^{\alpha}\left(q - \frac{1}{b}\right) < \tilde{\varphi}_{i'}^{\alpha}\left(q'\right) < \tilde{\varphi}_i^{\alpha}\left(q\right)\right\} \\
\tilde{A}^{\alpha} &= \left\{(q,i,q',i') \ ; \ (q',i') > (q,i) \ et \ \tilde{\varphi}_i^{\alpha}\left(q - \frac{1}{b}\right) < \tilde{\varphi}_{i'}^{\alpha}\left(q'\right) < \tilde{\varphi}_i^{\alpha}\left(q\right)\right\} \\
A^{\alpha}(q,i) &= \left\{(q',i') > (q,i) \ ; \ \varphi_i^{\alpha}\left(q - \frac{1}{b}\right) < \varphi_{i'}^{\alpha}\left(q'\right) < \varphi_i^{\alpha}\left(q\right)\right\} \\
A^{\alpha} &= \left\{(q,i,q',i') \ ; \ (q',i') > (q,i) \ et \ \varphi_i^{\alpha}\left(q - \frac{1}{b}\right) < \varphi_{i'}^{\alpha}\left(q'\right) < \varphi_i^{\alpha}\left(q\right)\right\}
\end{aligned}$$

On définit $\tilde{A}^{\alpha}_{eq} = \{(q,i,q',i') \in \tilde{A}^{\alpha} \ ; \ q = q'\}$, A^{α}_{eq} de même.
On pose $\tilde{A} = \coprod_{\alpha \in S} \tilde{A}^{\alpha}$, $A = \coprod_{\alpha} A^{\alpha}$, $\tilde{A}_{eq}$, A_{eq} de même.
On définit les polynômes $Q^{\alpha}_{(q,i),s} \in E[\![u^{1/b}]\!][(X_t)_{t \in \tilde{A}^{\alpha}}]$ pour $s \in [\![1,d]\!]$ et $(q,i) \in \tilde{V}^{\alpha}$, par récurrence sur $\mu = \tilde{\varphi}_i^{\alpha}(q)$: on pose

$$Q^{\alpha}_{(\tilde{q}_i^{\alpha},i),s} = \begin{cases} 1 & si \ s = i \\ 0 & si \ s \neq i \end{cases}$$

et

$$Q^{\alpha}_{(q,i),s} = Q^{\alpha}_{(q-\frac{1}{b},i),s} + \sum_{(q',i') \in \tilde{A}^{\alpha}(q,i)} X_{q,i,q',i'}.u^{q'-q}.Q^{\alpha}_{(q',i'),s} \ si \left(q - \frac{1}{b}, i\right) \in \tilde{V}^{\alpha}.$$

Enfin on note $\equiv$ la relation sur $E[\![u^{1/b}]\!][(X_t)_{t \in \tilde{A}^{\alpha}}]$ associée à l'idéal des polynômes ayant des coefficients de valuation strictement positive, i.e. *associée à l'idéal engendré par $u^{1/b}$.*

Les $Q^{\alpha}_{(q,i),s}$ sont définis de façon à avoir le lemme suivant :

Lemme 2.2.2. *Soit $\alpha \in S$ fixé. Si $((v_{q,i})_{(q,i) \in \tilde{V}^{\alpha}}, (a_t)_{t \in \tilde{A}^{\alpha}})$ est une famille avec les $v_{q,i} \in M' = E((u^{1/b}))^d$ et les $a_t \in E$ vérifiant la relation : pour $(q - \frac{1}{b}, i) \in \tilde{V}^{\alpha}$ on a*

$$v_{q,i} = u^{1/b}.v_{q-\frac{1}{b},i} + \sum_{(q',i') \in \tilde{A}^{\alpha}(q,i)} a_{q,i,q',i'}.v_{q',i'},$$

alors

$$v_{q,i} = \sum_{s=1}^{d} Q^{\alpha}_{(q,i),s}((a_t)_{t \in \tilde{A}^{\alpha}}).u^{q-\tilde{q}_s^{\alpha}}.v_{\tilde{q}_s^{\alpha},s}$$

pour $(q,i) \in \tilde{V}^{\alpha}$.

De plus, pour tous $s \in [\![1,d]\!]$ et $(q,i) \in \tilde{V}^{\alpha}$, si $\tilde{q}_s^{\alpha} > q$ ou $s < i$ ou $\tilde{\varphi}_s^{\alpha}(\tilde{q}_s^{\alpha}) > \tilde{\varphi}_i^{\alpha}(q)$ alors les coefficients de $Q^{\alpha}_{(q,i),s}$ sont tous de valuation strictement positive.
Les réductions des $Q^{\alpha}_{(q,i),s}$ modulo $\equiv$ sont dans $E[(X_t)_{t \in \tilde{A}^{\alpha}_{eq}}]$.

Démonstration. Si $(v_{q,i}, a_{q,i,q',i'})$ est une famille comme dans l'énoncé, on établit la première assertion par récurrence sur $\tilde{\varphi}_i^{\alpha}(q)$.

Pour tous $s \in [\![1,d]\!]$ et $(q,i) \in \tilde{V}^\alpha$, si $q > \tilde{q}_i^\alpha$ on a

$$Q^\alpha_{(q,i),s} \equiv Q^\alpha_{(q-\frac{1}{b},i),s} + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i)\\ q'=q}} X_{q,i,q',i'}.Q^\alpha_{(q',i'),s}. \tag{2.7}$$

Ainsi les coefficients constants des coefficients de $Q^\alpha_{(q,i),s}$ ne dépendent que des coefficients constants des coefficients de $Q^\alpha_{(q-\frac{1}{b},i),s}$ et des $Q^\alpha_{(q,i'),s}$ pour $(q,i') \in \tilde{A}^\alpha(q,i)$, polynômes qui sont tous indicés par des triplets (s',q',i') vérifiant $s'=s$, $\tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q') < \tilde{\varphi}^\alpha_i(q)$, $q' \leqslant q$ et $i' \geqslant i$. Donc l'avant-dernière assertion du lemme est vraie.
Pour la dernière assertion il suffit de s'assurer que les indéterminées apparaissant dans les réductions sont indexées par des éléments de $\tilde{A}^\alpha_{eq}$. La relation (2.7) le montre. □

Lemme 2.2.3. *Si $L=(L^\alpha)_\alpha$ est une collection de réseaux de $E(\!(u)\!)^d$ telle que $\tilde{\varphi}(L)=\tilde{\varphi}$ et si $\alpha \in S$, il existe une famille $((v_{q,i}),(a_{q,i,q',i'}))$ pour $(q,i) \in \tilde{V}^\alpha$ et les $(q',i') \in \tilde{A}^\alpha(q,i)$ avec les $v_{q,i} \in M'$, les $a_{q,i,q',i'} \in E$ tels que*

(i) pour $(q,i) \in \tilde{V}^\alpha$, on a $v(v_{q,i} - u^q.e_i) > (q,i)$ (et donc $v(v_{q,i}) = (q,i)$)

(ii) pour $(q,i) \in \tilde{V}^\alpha$ on a $v_{q,i} \in \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})$, et $\sigma(v_{q,i}) \in u^{\tilde{\varphi}^\alpha_i(q)} L^\alpha$

(iii) pour $(q-\frac{1}{b},i) \in \tilde{V}^\alpha$ on a

$$v_{q,i} = u^{1/b}.v_{q-\frac{1}{b},i} + \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i)} a_{q,i,q',i'}.v_{q',i'}.$$

Démonstration. On le montre par récurrence sur $\mu = \tilde{\varphi}^\alpha_i(q)$: soit $\mu \in \mathbb{Z}$ et supposons construits des $v_{q,i}$, $a_{q,i,q',i'}$ pour $\tilde{\varphi}^\alpha_i(q) \leqslant \mu$ tels qu'on ait (i), (ii) et (iii) (la condition est vide pour μ petit). Soit (q,i) tel que $\tilde{\varphi}^\alpha_i(q) = \mu+1$.

Si $\tilde{\varphi}^\alpha_i(q-1/b) = -\infty$ on prend pour $v_{q,i}$ un élément de $L^\alpha_{\geqslant\mu+1}$ tel que $v(v_{q,i}) = (q,i)$ et $v(v_{q,i} - u^q.e_i) > (q,i)$.
Sinon, comme $\tilde{\varphi}^\alpha_i(q) > -\infty$ on sait qu'il existe des $a_{q,i,q',i'} \in E$ pour $(q',i') > (q,i)$ tels que

$$u^{1/b}.v_{q-\frac{1}{b},i} + \sum_{(q',i')>(q,i)} a_{q,i,q',i'}.x_{q',i'} \in L^\alpha_{\geqslant\mu+1}$$

où on a posé

$$x_{q',i'} = \begin{cases} v_{q',i'} & \text{si } -\infty < \tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q') \leqslant \mu \\ \text{un élément de } L^\alpha_{\geqslant\tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q')} \text{ de val. } (q',i') & \text{si } \tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q') > \mu \\ u^{q'}.e_{i'} & \text{si } \tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q') = -\infty \end{cases}.$$

On peut prendre $a_{q,i,q',i'} = 0$ si $\tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q') > \mu$, quitte à retirer ces termes là (car alors on a $v_{q',i'} \in L^\alpha_{\geqslant\mu+1}$).

Montrons qu'on a $a_{q,i,q',i'} = 0$ pour $-\infty \leqslant \tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q') \leqslant \tilde{\varphi}^\alpha_i(q-\frac{1}{b})$: sinon on aurait

$$\sum_{\substack{(q',i')>(q,i)\\ \tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q')\leqslant\tilde{\varphi}^\alpha_i(q-\frac{1}{b})}} a_{q,i,q',i'}.v_{q',i'} + \underbrace{u^{1/b}.v_{q-\frac{1}{b},i} + \sum_{\substack{(q',i')>(q,i)\\ \tilde{\varphi}^\alpha_i(q-\frac{1}{b})<\tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q')\leqslant\mu}} a_{q,i,q',i'}.v_{q',i'}}_{\in L^\alpha_{\geqslant\tilde{\varphi}^\alpha_i(q-1/b)+1}} \in L^\alpha_{\geqslant\mu+1}$$

donc si (q', i') est la valuation du premier terme de la somme, on a à la fois $\tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q') \leqslant \tilde{\varphi}^\alpha_i(q-\frac{1}{b})$ et $\tilde{\varphi}^\alpha_{i'}(q') > \tilde{\varphi}^\alpha_i(q-\frac{1}{b})$.

Ainsi il existe des $a_{q,i,q',i'}$ uniques (on peut montrer l'unicité de même) pour $(q', i') \in \tilde{A}^\alpha(q, i)$ tels que

$$u^{1/b}.v_{q-\frac{1}{b},i} + \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i)} a_{q,i,q',i'}.v_{q',i'} \in L^\alpha_{\geqslant\mu+1}.$$

On pose alors $v_{q,i}$ égal à cette somme. □

On sait que pour q assez grand on a $\tilde{\varphi}^\alpha_i(q) = bq - \tilde{q}^{F\circ\alpha}_i$. On aimerait avoir l'existence d'une famille $((v^\alpha_{q,i}), (a^\alpha_{q,i,q',i'}))$ vérifiant aussi une relation de la forme

$$v^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i} = u^{-\tilde{\varphi}^\alpha_i(q)}\sigma(v^\alpha_{q,i}) + \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i)} a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i,q',i'}.v^{F\circ\alpha}_{q',i'}. \tag{2.8}$$

Pour montrer l'existence d'une telle famille, il suffirait d'avoir la relation (2.8) modulo $u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i+1/b}$, puis de travailler par récurrence. Mais il n'est pas clair que ces termes coïncident modulo $u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i+1/b}.E[\![u^{1/b}]\!]^d$. On rajoute donc un terme correcteur :

Proposition 2.2.4. *Il existe des polynômes*

$$R^\alpha_{i,s} \in E[(X^\alpha_t)_{t\in\tilde{A}^\alpha_{eq}}, (X^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}}, (C^\alpha_{i,j})_{i<j}, (C^{F\circ\alpha}_{i,j})_{i<j}]$$

tels que toute collection $L = (L^\alpha)_\alpha$ de réseaux de $E(\!(u)\!)^d$ telle que $\tilde{\varphi}(L) = \tilde{\varphi}$ et toute famille $((v^\alpha_{q,i}), (a^\alpha_{q,i,q',i'}))$ vérifiant les conditions (pour chaque α) (i), (ii) et (iii) du lemme 2.2.3 vérifie également pour tous i et α, et $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ tel que $\tilde{\varphi}^\alpha_i(q) = bq - \tilde{q}^{F\circ\alpha}_i$, que les éléments $v^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i}$ et

$$\begin{aligned} u^{-\tilde{\varphi}^\alpha_i(q)}\sigma(v^\alpha_{q,i}) \quad + & \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i)} a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i,q',i'}.v^{F\circ\alpha}_{q',i'} \\ & + u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i}\sum_{s=1}^d R^\alpha_{i,s}((a^\alpha_t)_{t\in\tilde{A}^\alpha_{eq}}, (a^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}}, (c^\alpha_{i,j}), (c^{F\circ\alpha}_{i,j})).v^{F\circ\alpha}_s \end{aligned}$$

sont congrus modulo $u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i+1/b}$ où pour $\alpha \in S$ on note $v^\alpha_s = u^{-\tilde{q}^\alpha_s}.v^\alpha_{\tilde{q}^\alpha_s,s}$ et $c^\alpha_{i,j} \in E$ les coefficients tels que v^α_s soit congru à $(0,\dots,0,1,c^\alpha_{i,i+1},\dots,c^\alpha_{i,d})$ modulo $u^{1/b}$.
De plus on peut prendre $R^\alpha_{i,s} = 0$ si $s \leqslant i$ ou $\tilde{q}^{F\circ\alpha}_s > \tilde{q}^{F\circ\alpha}_i$.

Démonstration. Si $L = (L^\alpha)$ et $((v^\alpha_{q,i}), (a^\alpha_{q,i,q',i'}))$ sont des familles comme dans l'énoncé, en utilisant le lemme 2.2.2 on obtient pour tous i, α et q assez grand

$$\begin{aligned} & v^{F\circ\alpha}_i - \sigma(u^{-q}.v^\alpha_{q,i}) - \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i)} a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i,q',i'}.u^{-\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i}.v^{F\circ\alpha}_{q',i'} \\ = \quad & v^{F\circ\alpha}_i - \sum_{s=1}^d \sigma\left(Q^\alpha_{(q,i),s}((a^\alpha_t)_{t\in\tilde{A}^\alpha})\right).\sigma(v^\alpha_s) \\ & - \sum_{s=1}^d \left(\sum_{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i)} a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i,q',i'}.u^{q'-\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i}.Q^{F\circ\alpha}_{(q',i'),s}((a^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}})\right).v^{F\circ\alpha}_s. \end{aligned}$$

D'après la dernière partie du lemme 2.2.2 la réduction des $Q^{\alpha'}_{(q'',i''),s''}$ ne fait intervenir que les inconnues indexées par des $t \in \tilde{A}^{\alpha'}_{eq}$. Il existe donc des polynômes

$$T^{\alpha}_{i,s} \in E[(X^{\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha}_{eq}}, (X^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}}, (C^{\alpha}_{a,b})_{a<b}, (C^{F\circ\alpha}_{a,b})_{a<b}]$$

(ne dépendant que de $\tilde{\varphi}$, pour q grand $Q^{\alpha}_{(q,i),s}$ est constant) tels que $v^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i}$ soit congru modulo $u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i+1/b}$ à

$$\begin{aligned} u^{-\tilde{\varphi}^{\alpha}_i(q)}\sigma(v^{\alpha}_{q,i}) \quad &+ \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i)} a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i,q',i'}.v^{F\circ\alpha}_{q',i'} \\ &+ \underbrace{u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i}\sum_{s=1}^{d} T^{\alpha}_{i,s}((a^{\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha}_{eq}}, (a^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}}, (c^{\alpha}_{a,b}), (c^{F\circ\alpha}_{a,b})).e_s}_{\text{terme correcteur}}\,. \end{aligned}$$

On souhaite que le terme correcteur soit dans $\sigma^*(L^{\alpha})$. Or on sait que par définition les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 & c^{F\circ\alpha}_{1,2} & . & . & c^{F\circ\alpha}_{1,d} \\ & . & . & & . \\ & & . & . & . \\ & 0 & & . & c^{F\circ\alpha}_{d-1,d} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ . \\ . \\ . \\ e_d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v^{F\circ\alpha}_1 \\ . \\ . \\ . \\ v^{F\circ\alpha}_d \end{pmatrix}$$

sont congrus modulo $u^{1/b}$. La matrice triangulaire $\begin{pmatrix} 1 & C^{F\circ\alpha}_{1,2} & . & . & C^{F\circ\alpha}_{1,d} \\ & . & . & & . \\ & & . & . & . \\ & 0 & & . & C^{F\circ\alpha}_{d-1,d} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ est inversible donc il existe des polynômes $R^{\alpha}_{i,s}$ tels que $v^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i}$ est congru modulo $u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i+1/b}$ à

$$\begin{aligned} u^{-\tilde{\varphi}^{\alpha}_i(q)}\sigma(v^{\alpha}_{q,i}) \quad &+ \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i)} a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i,q',i'}.v^{F\circ\alpha}_{q',i'} \\ &+ u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i}\sum_{s=1}^{d} R^{\alpha}_{i,s}((a^{\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha}_{eq}}, (a^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}}, (c^{\alpha}_{a,b}), (c^{F\circ\alpha}_{a,b})).v^{F\circ\alpha}_s. \end{aligned}$$

On peut prendre $R^{\alpha}_{i,s} = 0$ pour $s \leqslant i$: s'il existait $s \leqslant i$ tel que

$$R^{\alpha}_{i,s}((a^{\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha}_{eq}}, (a^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}}, (c^{\alpha}_{a,b}), (c^{F\circ\alpha}_{a,b})) \neq 0$$

alors $u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i}\sum_{s=1}^{d} R^{\alpha}_{i,s}((a^{\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha}_{eq}}, (a^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}}, (c^{\alpha}_{a,b}), (c^{F\circ\alpha}_{a,b})).v^{F\circ\alpha}_s$ serait un nombre de valuation supérieure strictement à $(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i, i)$, congru modulo $u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i+1/b}$ à

$$v^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i} - u^{-\tilde{\varphi}^{\alpha}_i(q)}\sigma(v^{\alpha}_{q,i}) - \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i)} a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i,q',i'}.v^{F\circ\alpha}_{q',i'}$$

qui est de valuation $> (\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i, i)$.

Vérifions enfin qu'on peut prendre $R^{\alpha}_{i,s} = 0$ pour $\tilde{q}^{F\circ\alpha}_s > \tilde{q}^{F\circ\alpha}_i$: sinon soit s_0 minimal tel que $R^{\alpha}_{i,s_0}((a^{\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha}_{eq}}, (a^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}}, (c^{\alpha}_{a,b}), (c^{F\circ\alpha}_{a,b})) \neq 0$. On a

$$u^{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i}\textstyle\sum_{s,\tilde{q}^{F\circ\alpha}_s>\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i} R^{\alpha}_{i,s}((a^{\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha}_{eq}}, (a^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}}, (c^{\alpha}_{a,b}), (c^{F\circ\alpha}_{a,b})).v^{F\circ\alpha}_s$$

congru modulo $u^{\tilde{q}_i^{F\circ\alpha}+1/b}$ à

$$\begin{aligned} v^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}_i^{F\circ\alpha},i} &- u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)}\sigma(v^\alpha_{q,i}) - \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}_i^{F\circ\alpha},i)} a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}_i^{F\circ\alpha},i,q',i'}.v^{F\circ\alpha}_{q',i'} \\ &- u^{\tilde{q}_i^{F\circ\alpha}} \sum_{s,\tilde{q}_s^{F\circ\alpha}\leqslant\tilde{q}_i^{F\circ\alpha}} R^\alpha_{i,s}((a^\alpha_t)_{t\in\tilde{A}^\alpha_{eq}},(a^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}},(c^\alpha_{a,b}),(c^{F\circ\alpha}_{a,b})).v^{F\circ\alpha}_s \end{aligned}$$

donc le membre de droite est dans $\sigma^*(L^\alpha)$ et est de valuation $(\tilde{q}_i^{F\circ\alpha}, s_0)$. Ainsi on a $\tilde{q}_{s_0}^{F\circ\alpha} \leqslant \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$, c'est une contradiction. □

Dans la suite on fixe des polynômes comme dans la proposition précédente. Le lemme 2.2.3 et la proposition 2.2.4 montrent que toute collection L de réseaux de fonctions $\tilde{\varphi}$ admet une famille 1-correcte au sens de la définition suivante :

Définition 2.2.5. *Si L est une collection de réseaux tel que $\tilde{\varphi}(L) = \tilde{\varphi}$ et $n \geqslant 1$, une famille n-correcte pour L est une famille $(v^\alpha_{q,i}, a^\alpha_t)$ vérifiant les conditions (i), (ii) du lemme 2.2.3, la condition (iii) modulo $u^{q+n/b}$ du même lemme 2.2.3 ainsi que la relation (iv) suivante modulo $u^{\tilde{q}_i^{F\circ\alpha}+n/b}$:*

$$\begin{aligned} v^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}_i^{F\circ\alpha},i} &= u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)}\sigma(v^\alpha_{q,i}) + \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}_i^{F\circ\alpha},i)} a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}_i^{F\circ\alpha},i,q',i'}.v^{F\circ\alpha}_{q',i'} \\ &\quad + u^{\tilde{q}_i^{F\circ\alpha}} \sum_{s=1}^{d} R^\alpha_{i,s}((a^\alpha_t)_{t\in\tilde{A}^\alpha_{eq}},(a^{F\circ\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}_{eq}},(c^\alpha_{a,b}),(c^{F\circ\alpha}_{a,b})).v^{F\circ\alpha}_s \qquad (iv) \end{aligned}$$

(avec les notations de la proposition 2.2.4).
Une famille correcte pour L est une famille vérifiant les relations (i) à (iv).

Proposition 2.2.6. *Soient $n \geqslant 1$, $L = (L^\alpha)_\alpha$ une collection de réseaux telle que $\tilde{\varphi}(L) = \tilde{\varphi}$. On suppose construit une famille n-correcte $((v^\alpha_{q,i}),(a^\alpha_t))$ pour L.*
Alors il existe une famille $(n+1)$-correcte $((w^\alpha_{q,i}),(b^\alpha_t))$ telle que pour tout α, pour tout $(q,i) \in \tilde{V}^\alpha$, on ait $w^\alpha_{q,i}$ congru à $v^\alpha_{q,i}$ modulo $u^{q+n/b}$ et $b^\alpha_{q,i,q',i'} = a^\alpha_{q,i,q',i'}$ pour $q' < q + n/b$.

Démonstration. On fixe $\alpha \in \omega$. On construit la nouvelle famille par récurrence sur q et à q fixé par récurrence descendante sur i.

Soit $(q,i) \in \tilde{V}^\alpha$. On suppose construits les $w^\alpha_{q',i'}$, $b^\alpha_{q',i',q'',i''}$ pour $q' < q$ ou $q' = q$ et $i' > i$.
On a deux cas : d'abord si $(q - \frac{1}{b}, i) \notin \tilde{V}^\alpha$, alors $q = \tilde{q}_i^\alpha$. On pose $\alpha' = F^{-1}\circ\alpha$. On sait d'après (iv) que si q_0 est tel que $\tilde{\varphi}_i^{\alpha'}(q_0) = bq_0 - \tilde{q}_i^\alpha$, on a modulo $u^{q+n/b}$ les congruences suivantes :

$$\begin{aligned} \underbrace{v^\alpha_{q,i}}_{\sigma(\cdot)\in u^{\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)}L^\alpha} &\equiv u^{-\tilde{\varphi}_i^{\alpha'}(q_0)}.\sigma(v^{\alpha'}_{q_0,i}) + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i)\\ q'<q+n/b}} a^\alpha_{q,i,q',i'}.v^\alpha_{q',i'} \\ &\quad + u^q \sum_s R^{\alpha'}_{i,s}((a^{\alpha'}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha'}_{eq}},(a^{\alpha'}_t)_{t\in\tilde{A}^\alpha_{eq}},(c^{\alpha'}_{a,b}),(c^\alpha_{a,b})).v^\alpha_s \\ &\equiv u^{-\tilde{\varphi}_i^{\alpha'}(q_0)}.\sigma(v^{\alpha'}_{q_0,i}) + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i)\\ q'=q}} a^\alpha_{q,i,q',i'}.\underbrace{w^\alpha_{q',i'}}_{\text{déjà construits}} \\ &\quad + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i)\\ q<q'<q+n/b}} a^\alpha_{q,i,q',i'}.v^\alpha_{q',i'} \\ &\quad + u^q \sum_{\substack{s>i\\ \tilde{q}_s^\alpha\leqslant q}} R^{\alpha'}_{i,s}((a^{\alpha'}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha'}_{eq}},(a^\alpha_t)_{t\in\tilde{A}^\alpha_{eq}},(c^{\alpha'}_{a,b}),(c^\alpha_{a,b})).\underbrace{w^\alpha_s}_{\text{déjà construits}} . \end{aligned}$$

Donc il existe des coefficients $b^{\alpha}_{q,i,q',i'} \in E$ pour $q' \geqslant q+n/b$ tels que

$$u^{-\tilde{\varphi}^{\alpha'}_i(q_0)}.\sigma(v^{\alpha'}_{q_0,i}) + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q'=q}} a^{\alpha}_{q,i,q',i'}.w^{\alpha}_{q',i'} + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q<q'<q+n/b}} a^{\alpha}_{q,i,q',i'}.v^{\alpha}_{q',i'}$$
$$+u^q \sum_{\substack{s>i\\ \tilde{q}^{\alpha}_s\leqslant q}} R^{\alpha'}_{i,s}((a^{\alpha'}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha'}_{eq}},(a^{\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha}_{eq}},(c^{\alpha'}_{a,b}),(c^{\alpha}_{a,b})).w^{\alpha}_s + \sum_{\substack{(q',i')>(q,i)\\ q'\geqslant q+n/b}} b^{\alpha}_{q,i,q',i'}.x_{q',i'}$$

soit un élément de $\sigma^*(L^{\alpha'})$ envoyé par σ dans $u^{\tilde{\varphi}^{\alpha}_i(q)}L^{\alpha}$, avec

$$x_{q',i'} = \begin{cases} v^{\alpha}_{q',i'} & \text{si } (q',i')\in\tilde{V}^{\alpha} \\ u^{q'}.e_{i'} & \text{si } (q',i')\notin\tilde{V}^{\alpha} \end{cases} .$$

On peut retirer les termes $b^{\alpha}_{q,i,q',i'}.x_{q',i'}$ avec $\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i'}(q') \geqslant \tilde{\varphi}^{\alpha}_i(q)$.
De plus on a $b^{\alpha}_{q,i,q',i'} = 0$ si $\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i'}(q') = -\infty$. En effet sinon

$$\sum_{\substack{(q',i')>(q,i)\\ q'\geqslant q+n/b \text{ et } \tilde{\varphi}^{\alpha}_{i'}(q')=-\infty}} b^{\alpha}_{q,i,q',i'}.x_{q',i'} \in (L^{\alpha'})'$$

et est de valuation (q',i') vérifiant $\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i'}(q') = -\infty$, c'est une contradiction.

Ainsi il existe des coefficients (uniques) $b^{\alpha}_{q,i,q',i'}$ pour $(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)$ et $q'\geqslant q+n/b$ tels que

$$\begin{aligned} w^{\alpha}_{q,i} \quad := \quad & u^{-\tilde{\varphi}^{\alpha'}_i(q_0)}.\sigma(v^{\alpha'}_{q_0,i}) + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q'=q}} a^{\alpha}_{q,i,q',i'}.w^{\alpha}_{q',i'} \\ & + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q<q'<q+n/b}} a^{\alpha}_{q,i,q',i'}.v^{\alpha}_{q',i'} \\ & +u^q \sum_{\substack{s>i\\ \tilde{q}^{\alpha}_s\leqslant q}} R^{\alpha'}_{i,s}((a^{\alpha'}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha'}_{eq}},(a^{\alpha}_t)_{t\in\tilde{A}^{\alpha}_{eq}},(c^{\alpha'}_{a,b}),(c^{\alpha}_{a,b})).w^{\alpha}_s \\ & + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q'\geqslant q+n/b}} b^{\alpha}_{q,i,q',i'}.v^{\alpha}_{q',i'} \end{aligned}$$

vérifie $\sigma(w^{\alpha}_{q,i}) \in u^{\tilde{\varphi}^{\alpha}_i(q)}L^{\alpha}$. On a donc $w^{\alpha}_{q,i}$ congru à $v^{\alpha}_{q,i}$ modulo $u^{q+n/b}$, et $w^{\alpha}_{q,i}$ vérifie (i) et (ii).
On pose $b^{\alpha}_{q,i,q',i'} = a^{\alpha}_{q,i,q',i'}$ pour $q' < q+n/b$.

Pour le deuxième cas on a $(q-\frac{1}{b},i)\in\tilde{V}^{\alpha}$: on fait alors un raisonnement analogue, mais en partant de l'équation (iii) cette fois. On a modulo $u^{q+n/b}$ la congruence suivante :

$$v^{\alpha}_{q,i} \quad\equiv\quad u^{1/b}.w^{\alpha}_{q-\frac{1}{b},i} + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q'=q}} a^{\alpha}_{q,i,q',i'}.w^{\alpha}_{q',i'} + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q<q'<q+n/b}} a^{\alpha}_{q,i,q',i'}.v^{\alpha}_{q',i'},$$

il suit qu'il existe des $b^{\alpha}_{q,i,q',i'} \in E$ pour $q' \geqslant q+n/b$ et $\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i'}(q') < \tilde{\varphi}^{\alpha}_{i}(q)$ tels que

$$\begin{aligned} w^{\alpha}_{q,i} &:= u^{1/b}.w^{\alpha}_{q-\frac{1}{b},i} + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q'=q}} a^{\alpha}_{q,i,q',i'}.w^{\alpha}_{q',i'} + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q<q'<q+n/b}} a^{\alpha}_{q,i,q',i'}.v^{\alpha}_{q',i'} \\ &+ \sum_{\substack{(q',i')>(q,i)\\ q'\geqslant q+n/b \text{ et } \tilde{\varphi}^{\alpha}_{i'}(q')<\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i}(q)}} b^{\alpha}_{q,i,q',i'}.x_{q',i'} \end{aligned}$$

est envoyé dans $u^{\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i}(q)}L^{\alpha}$ par σ, avec $x_{q',i'} = \begin{cases} v^{\alpha}_{q',i'} & \text{si } (q',i')\in\tilde{V}^{\alpha} \\ u^{q'}.e_{i'} & \text{si } (q',i')\notin\tilde{V}^{\alpha} \end{cases}$. On a forcément $b^{\alpha}_{q,i,q',i'} = 0$ pour $\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i'}(q') \leqslant \tilde{\varphi}^{\alpha}_{i}(q-\frac{1}{b})$: sinon on a

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{(q',i')>(q,i)\\ q'\geqslant q+n/b \text{ et } \tilde{\varphi}^{\alpha}_{i'}(q')\leqslant\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i}(q-\frac{1}{b})}} b^{\alpha}_{q,i,q',i'}.x_{q',i'} \\ = \; & w^{\alpha}_{q,i} - u^{1/b}.v^{\alpha}_{q-\frac{1}{b},i} - \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q'=q}} a^{\alpha}_{q,i,q',i'}.w^{\alpha}_{q',i'} - \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q<q'<q+n/b}} a^{\alpha}_{q,i,q',i'}.v^{\alpha}_{q',i'} \\ & - \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(q,i)\\ q'\geqslant q+n/b}} b^{\alpha}_{q,i,q',i'}.v^{\alpha}_{q',i'} \end{aligned}$$

donc en notant (q',i') la valuation du membre de gauche, on a $\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i'}(q') \leqslant \tilde{\varphi}^{\alpha}_{i}(q-\frac{1}{b})$, pourtant l'image par σ du membre de droite est dans $u^{1+\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i}(q-\frac{1}{b})}L^{\alpha}$, d'où $\tilde{\varphi}^{\alpha}_{i'}(L)(q') > \tilde{\varphi}^{\alpha}_{i}(q-\frac{1}{b})$, contradiction.
On pose comme demandé $b^{\alpha}_{q,i,q',i'} = a^{\alpha}_{q,i,q',i'}$ pour $q' < q+n/b$, et on a $w^{\alpha}_{q,i}$ congru à $v^{\alpha}_{q,i}$ modulo $u^{q+n/b}$.

Il reste à vérifier les conditions (iii) et (iv), faisons-le pour (iv) par exemple.
Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant d$ on a $w^{\alpha}_{\tilde{q}^{\alpha}_{i},i} \equiv v^{\alpha}_{\tilde{q}^{\alpha}_{i},i}$ modulo $u^{\tilde{q}^{\alpha}_{i}+n/b}$ donc $(d^{\alpha}_{a,b})_{a,b} = (c^{\alpha}_{a,b})_{a,b}$, où on a noté $d^{\alpha}_{a,b}$ les analogues pour la nouvelle famille des $c^{\alpha}_{a,b}$. De plus on a $b^{\alpha}_{t} = a^{\alpha}_{t}$ pour $t \in \tilde{A}^{\alpha}_{eq}$. Il suit

$$\begin{aligned} w^{\alpha}_{\tilde{q}^{\alpha}_{i},i} &= u^{-\tilde{\varphi}^{\alpha'}_{i}(q_0)}.\sigma(v^{\alpha'}_{q_0,i}) + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(\tilde{q}^{\alpha}_{i},i)\\ q'=\tilde{q}^{\alpha}_{i}}} b^{\alpha}_{\tilde{q}^{\alpha}_{i},i,q',i'}.w^{\alpha}_{q',i'} \\ &+ \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(\tilde{q}^{\alpha}_{i},i)\\ \tilde{q}^{\alpha}_{i}<q'<\tilde{q}^{\alpha}_{i}+n/b}} b^{\alpha}_{\tilde{q}^{\alpha}_{i},i,q',i'}.v^{\alpha}_{q',i'} + \sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{\alpha}(\tilde{q}^{\alpha}_{i},i)\\ q'\geqslant\tilde{q}^{\alpha}_{i}+n/b}} b^{\alpha}_{\tilde{q}^{\alpha}_{i},i,q',i'}.v^{\alpha}_{q',i'} \\ &+ u^{\tilde{q}^{\alpha}_{i}} \sum_{\substack{s>i\\ \tilde{q}^{\alpha}_{s}\leqslant\tilde{q}^{\alpha}_{i}}} R^{\alpha'}_{i,s}((b^{\alpha'}_{t})_{t\in\tilde{A}^{\alpha'}_{eq}}, (b^{\alpha}_{t})_{t\in\tilde{A}^{\alpha}_{eq}}, (d^{\alpha'}_{a,b}), (d^{\alpha}_{a,b})).w^{\alpha}_{s}. \end{aligned}$$

Or $n \geqslant 1$ et $w^{\alpha'}_{q_0,i}$ est congru à $v^{\alpha'}_{q_0,i}$ modulo $u^{q_0+n/b}$ ainsi $u^{-\tilde{\varphi}^{\alpha'}_{i}(q_0)}.\sigma(v^{\alpha'}_{q_0,i}) \equiv u^{-\tilde{\varphi}^{\alpha'}_{i}(q_0)}.\sigma(w^{\alpha'}_{q_0,i})$ modulo $u^{\tilde{q}^{\alpha}_{i}+(n+1)/b}$, et si $(q',i') \in \tilde{A}^{\alpha}(\tilde{q}^{\alpha}_{i},i)$ avec $q' > \tilde{q}^{\alpha}_{i}$, la congruence $w^{\alpha}_{q',i'} \equiv v^{\alpha}_{q',i'}$ modulo $u^{q'+n/b}$ assure $w^{\alpha}_{q',i'} \equiv v^{\alpha}_{q',i'}$ modulo $u^{\tilde{q}^{\alpha}_{i}+(n+1)/b}$. Cela établit (iv). $\square$

Par passage à la limite on obtient :

Corollaire 2.2.7. *Toute collection $L = (L^\alpha)$ telle que $\tilde{\varphi}(L) = \tilde{\varphi}$ admet une famille correcte.*

Remarque 2.2.8. Si $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(L)$ et $(v^\alpha_{q,i}, a)$ est une famille correcte pour L, alors L^α est engendré par les $w^\alpha_i = u^{-\tilde{\varphi}^\alpha_i(x_i)}.\sigma(v^\alpha_{x_i,i})$ où les x_i sont pris assez grand pour que $\tilde{\varphi}^\alpha_i(x_i) = bx_i - \tilde{q}^{F\circ\alpha}_i$. En effet quitte à augmenter les x_i (ce qui ne change pas les w^α_i) on peut supposer que tous les $\tilde{\varphi}^\alpha_i(x_i)$ sont égaux à un même entier μ. On sait que les w^α_i sont dans L^α. Les $w^\alpha_i \pmod{uL^\alpha}$ forment une famille E-libre de L^α/uL^α : c'est équivalent à montrer que les $\overline{v^\alpha_{x_i,i}}$ forment une famille libre de L^α_μ. Mais si $\sum_i \alpha_i.\overline{v^\alpha_{x_i,i}} = 0$, on a $\sum_i \alpha_i.v^\alpha_{x_i,i} \in L^\alpha_{\geqslant \mu+1}$. Donc si l'un des α_i était non nul, on aurait $v(\sum_i \alpha_i.v^\alpha_{x_i,i}) = (x_j, j)$ avec $\tilde{\varphi}^\alpha_j(x_j) > \mu$ et on obtiendrait une contradiction. Or L^α/uL^α est un E-espace vectoriel de dimension d donc $(w^\alpha_i \bmod uL^\alpha)_{1\leqslant i\leqslant d}$ est une famille génératrice de L^α/uL^α. Donc par le lemme de Nakayama, la famille $(w^\alpha_i)_i$ engendre L^α sur $E[\![u]\!]$.
De plus cette famille est $E(\!(u)\!)$-libre : les w^α_i sont de valuation $(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i, i)$ ainsi le déterminant de la matrice des w^α_i est non nul de valuation $\sum_i \tilde{q}^{F\circ\alpha}_i$.

On peut maintenant établir une majoration de $\dim_E\left(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}\right)$. Pour cela on va définir un sous-schéma fermé $\mathcal{D}$ de l'espace affine $\mathbb{A}_E^{(S\times I)\sqcup\tilde{A}}$, avec $I = \{(i,j) \in [\![1,d]\!]^2 \ ; \ i < j\}$, et un morphisme (d'un sous-schéma) de $\mathcal{D}$ dans $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ surjectif sur les E-points.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble

$$\left\{\begin{array}{l} \text{familles } ((v^\alpha_{q,i})_{(q,i)\in\tilde{V}^\alpha}, (a^\alpha_t)_{t\in\tilde{A}^\alpha})_{\alpha\in S} \text{ vérifiant les relations } (i) \\ \text{et } (iii) \text{ du lemme 2.2.3 et la relation } (iv) \text{ de la définition 2.2.5} \end{array}\right\}.$$

Pour $(i,s) \in [\![1,d]\!]^2$, $\alpha \in S$, soit

$$\begin{aligned} U^\alpha_{i,s} &= \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(\tilde{q}^\alpha_i,i)} u^{q'-\tilde{q}^\alpha_i}.X^\alpha_{\tilde{q}^\alpha_i,i,q',i'}.Q^\alpha_{(q',i'),s} \\ V^\alpha_{i,s} &= \sigma(Q^\alpha_{(q,i),s}) \end{aligned}$$

avec q assez grand pour que $\tilde{\varphi}^\alpha_i(q) = bq - \tilde{q}^{F\circ\alpha}_i$, $\sigma(X_t) = X_t^{p^h}$ et σ agissant « comme σ » sur $E[\![u^{1/b}]\!]$. Si $(v^\alpha_{q,i}, a = (a^\alpha_t))$ est une famille vérifiant (i) et (iii), la condition (iv) est vérifiée ssi on a pour tout $\alpha \in S$

$$\begin{pmatrix} v^{F\circ\alpha}_1 \\ . \\ . \\ . \\ v^{F\circ\alpha}_d \end{pmatrix} = U^{F\circ\alpha}(a).\begin{pmatrix} v^{F\circ\alpha}_1 \\ . \\ . \\ . \\ v^{F\circ\alpha}_d \end{pmatrix} + V^\alpha(a).\begin{pmatrix} \sigma(v^\alpha_1) \\ . \\ . \\ . \\ \sigma(v^\alpha_d) \end{pmatrix} + R^\alpha(a, (c^{\alpha'}_{i,j})).\begin{pmatrix} v^{F\circ\alpha}_1 \\ . \\ . \\ . \\ v^{F\circ\alpha}_d \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

toujours avec $v^{\alpha'}_i = u^{-\tilde{q}^{\alpha'}_i}.v^{\alpha'}_{\tilde{q}^{\alpha'}_i,i}$.

L'équation (2.9) mod $u^{1/b}E[\![u^{1/b}]\!]^d$, en les inconnues $c^{\alpha'}_{i,j}$, $a^{\alpha'}_t$ est

$$(I_d - U'^{F\circ\alpha}(a) - R^\alpha(a, (c^{\alpha'}_{i,j}))).\begin{pmatrix} e_1 + \sum_{j>1} c^{F\circ\alpha}_{1,j}.e_j \\ . \\ . \\ . \\ e_d \end{pmatrix} = V'^\alpha(a).\begin{pmatrix} \sigma(e_1 + \sum_{j>1} c^\alpha_{1,j}.e_j) \\ . \\ . \\ . \\ \sigma(e_d) \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

(on a noté $U'^\alpha_{i,s}$, $V'^\alpha_{i,s}$ les réductions des polynômes). Elle définit un fermé de Zariski de l'espace affine $\mathbb{A}_E^{(S\times I)\sqcup\tilde{A}}(E)$. On note $\mathcal{D}$ le sous-schéma fermé (réduit) de $\mathbb{A}_E^{(S\times I)\sqcup\tilde{A}}$ associé.

Proposition 2.2.9. *L'application* $\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{(S\times I)\sqcup\tilde{A}}(E) \\ (v^\alpha_{q,i},a) & \longmapsto & ((c^\alpha_{i,j}),a) \end{array}$ *est injective d'image* $\mathcal{D}(E)$.

Démonstration. On vérifie que l'application

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}' = \{((v^\alpha_i),a)\ ;\ v(v^\alpha_i)=(0,i), v(v^\alpha_i - e_i) > (0,i) \text{ et on a (2.9)}\} \\ (v^\alpha_{q,i},a) & \longmapsto & ((v^\alpha_i),a) \end{array}$$

est bijective de réciproque

$$((v^\alpha_i),a) \longmapsto \left(\left(v^\alpha_{q,i} = \sum_{s=1}^d Q^\alpha_{(q,i),s}(a).u^q.v^\alpha_s\right),a\right).$$

Il suffit donc de montrer que $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \longrightarrow & \mathcal{D}(E) \\ ((v^\alpha_i),a) & \longmapsto & ((c^\alpha_{i,j}),a) \end{array}$ est bijective.

Pour l'injectivité, si $((v^\alpha_i),a)$ et $((v'^\alpha_i),a')$ ont même image $((c^\alpha_{i,j}),a)$, on pose $w^\alpha_i = v^\alpha_i - v'^\alpha_i$, les $w^\alpha_i \in E[\![u^{1/b}]\!]^d$ vérifient

$$(I_d - U^{F\circ\alpha}(a) - R^\alpha(a,(c^{\alpha'}_{i,j}))).\begin{pmatrix} w^{F\circ\alpha}_1 \\ . \\ . \\ . \\ w^{F\circ\alpha}_d \end{pmatrix} = V^\alpha(a).\begin{pmatrix} \sigma(w^\alpha_1) \\ . \\ . \\ . \\ \sigma(w^\alpha_d) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice carrée $T^\alpha = I_d - U^{F\circ\alpha}(a) - R^\alpha(a,(c^{\alpha'}_{i,j}))$ est inversible dans $M_d(E[\![u^{1/b}]\!])$: en effet on a

$$\begin{array}{rcl} U^{F\circ\alpha}_{i,s}(a) & = & \displaystyle\sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i) \\ q'>\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i}} u^{q'-\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i}.a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i,q',i'}.Q^{F\circ\alpha}_{(q',i'),s}(a) \\ & & + \displaystyle\sum_{\substack{(q',i')\in\tilde{A}^{F\circ\alpha}(\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i) \\ q'=\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i}} a^{F\circ\alpha}_{\tilde{q}^{F\circ\alpha}_i,i,q',i'}.Q^{F\circ\alpha}_{(q',i'),s}(a) \end{array}$$

le premier terme de la somme étant de valuation strictement positive. Les $Q^{F\circ\alpha}_{(q',i'),s}(a)$ apparaîssant dans le deuxième terme de la somme sont eux aussi de valuation strictement positive si $i \geqslant s$ puisque alors $i' > i$. Donc $v(U^{F\circ\alpha}_{i,s}(a)) > 0$ si $i \geqslant s$. On a également $R^\alpha_{i,s} = 0$ pour $i \geqslant s$. Ainsi

$$det(T^\alpha) = \sum_{\omega\in\mathfrak{S}_d} sign(\omega).\prod_{s=1}^d \left(\delta_{s,\omega(s)} - U^{F\circ\alpha}_{s,\omega(s)}(a) - R^\alpha_{s,\omega(s)}(a,(c^{\alpha'}_{i,j}))\right)$$

est de valuation 0.

Donc

$$\begin{pmatrix} w^{F\circ\alpha}_1 \\ . \\ . \\ . \\ w^{F\circ\alpha}_d \end{pmatrix} = (T^\alpha)^{-1}.V^\alpha(a).\begin{pmatrix} \sigma(w^\alpha_1) \\ . \\ . \\ . \\ \sigma(w^\alpha_d) \end{pmatrix}$$

et les $w_i^{F\circ\alpha}$ sont dans $u.E[\![u^{1/b}]\!]$ pour tout α. Mais alors les w_i^α sont dans $u^b.E[\![u^{1/b}]\!]$, et on peut recommencer le procédé. On obtient que les w_i^α sont nuls.

Pour la surjectivité, l'important est là encore l'inversibilité des matrices T^α.
Si $((c_{i,j}^\alpha), a) \in \mathcal{D}(E)$, on pose $v_i^{\alpha,\leqslant 0} = e_i + \sum_{j>i} c_{i,j}^\alpha.e_j$. On va construire des vecteurs $v_i^{\alpha,\leqslant l}$ par récurrence sur $l \geqslant 0$. Si $l \geqslant 0$ et les $v_i^{\alpha,\leqslant l}$ sont construits et sont congrus à $((T^\alpha)^{-1}.V^\alpha(a).\sigma(v_i^{\alpha,\leqslant l}))_i$ modulo $u^{(l+1)/b}$ alors on pose

$$(v_i^{F\circ\alpha,l+1})_i = \text{ termes de valuation } (l+1)/b \text{ de } \left[(T^\alpha)^{-1}.V^\alpha(a).(\sigma(v_i^{\alpha,\leqslant l}))_i\right]$$

et $(v_i^{\alpha,\leqslant l+1})_i = (v_i^{\alpha,\leqslant l} + v_i^{\alpha,l+1})_i$.
On a, modulo $u^{(l+2)/b}$, les congruences suivantes :

$$\begin{aligned}(T^\alpha)^{-1}.V^\alpha(a).(\sigma(v_i^{\alpha,\leqslant l+1}))_i &\equiv (T^\alpha)^{-1}.V^\alpha(a).(\sigma(v_i^{\alpha,\leqslant l}))_i \\ &\equiv (v_i^{F\circ\alpha,\leqslant l})_i + (v_i^{F\circ\alpha,l+1})_i.\end{aligned}$$

On peut poser alors $v_i^\alpha = \lim_{l\to+\infty} v_i^{\alpha,\leqslant l}$ pour tout i et l'élément $((c_{i,j}^\alpha), a)$ est l'image de $((v_i^\alpha)_i, a) \in \mathcal{C}'$. $\square$

On définit maintenant un morphisme de $\mathcal{D}$ dans $\prod_\alpha Grass_d$.
Si $y = ((v_{q,i}^\alpha), a) \in \mathcal{D}(E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$, on définit les $w_i^\alpha = w_i^\alpha(y)$ comme dans la remarque 2.2.8 : pour chaque i et α on choisit $x \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ assez grand pour que $\tilde{\varphi}_i^\alpha(x) = bx - \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$ et on pose $w_i^\alpha = u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(x)}.\sigma(v_{x,i}^\alpha)$. On a déjà vu que les w_i^α ainsi définis sont $E(\!(u)\!)$-libres dans M : la matrice des w_i^α est de déterminant $\sum_i \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$. Le sous-$E[\![u]\!]$-module $L^\alpha(y)$ engendré par les w_i^α est donc un réseau de M. Concernant les diviseurs élémentaires $\nu_1 \geqslant \cdots \geqslant \nu_d$ de $L^\alpha(y)$, on sait que $\nu_d = \min_i \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$ et $\sum_i \nu_i = \sum_i \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$. On peut majorer ν_1 par

$$\sum_i \tilde{q}_i^{F\circ\alpha} - (d-1)\left(\min_i\ \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}\right)$$

ainsi il existe $N \geqslant 0$ indépendant de y tel que $L^\alpha(y) \in Grass_d^{r,N}(E)$ avec $r = \sum_i \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$.

Proposition 2.2.10. *L'application $\mathcal{D}(E) \to Grass_d^{r,N}(E)$, $y \mapsto L^\alpha(y)$ est un morphisme de variétés.*

Démonstration. Vérifions que la composition g de l'application considérée avec l'immersion fermée $Grass_d^{r,N}(E) \to G_r(E)$ est continue. Si $\pi : u^{-N}\Lambda_E \to u^{-N}\Lambda_E/u^N\Lambda_E$ est la projection, $g(y)$ est engendré comme E-ev par les $\pi(u^s.w_i^\alpha(y))$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$ et $0 \leqslant s < N - \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$. Il existe des polynômes $S_{i',j'}^{\alpha,i,s} \in E[(C_{r,s}^{\alpha'}), (a_t^{\alpha'})]$ tels que si $y \in \mathcal{D}(E)$,

$$u^s w_i^\alpha(y) = \sum_{1\leqslant i'\leqslant d,\ j'\geqslant -N} S_{i',j'}^{\alpha,i,s}(y).u^{j'}e_{i'}.$$

Les $G_r^I(E)$ pour $I \subseteq F$ de cardinal $Nd+r$ forment un recouvrement ouvert de $G_r(E)$. Fixons un tel I, et Z un fermé de $G_r^I(E) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_E^{I\times F\setminus I}(E)$, et montrons que $g^{-1}(G_r^I(E))$ est un ouvert de $\mathcal{D}(E)$ dont $g^{-1}(Z)$ est un fermé.
Si $y \in \mathcal{D}(E)$, on a $y \in g^{-1}(G_r^I(E))$ ssi

$$\dim_E\left(\langle \pi(u^s.w_i^\alpha(y))\ ;\ i,s\rangle + \langle \pi(u^j e_i)\ ;\ (i,j)\in I\rangle\right) = 2Nd$$

ssi la matrice A est de déterminant non-nul, où on note A la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des $\pi(u^s.w_i^\alpha(y))$ et des $u^j e_i$ pour $(i,j) \in I$, dans la base standard de

$u^{-N}\Lambda_E/u^N\Lambda_E$. La condition est ouverte et $g^{-1}(G_r^I(E))$ est bien un ouvert de $\mathcal{D}(E)$.
Si $y \in g^{-1}(G_r^I(E))$ les $\pi(u^s.w_i^\alpha(y))$ et les $u^j e_i$ pour $(i,j) \in I$ forment une base de l'espace vectoriel $u^{-N}\Lambda_E/u^N\Lambda_E$. Or le fermé Z de $G_r^I(E)$ est défini par l'annulation de certains polynômes en les coefficients de la matrice de la projection de $u^{-N}\Lambda_E/u^N\Lambda_E$ sur E^I (parallèlement à $g(y)$), matrice prise dans les bases standard. Ainsi $g^{-1}(Z)$ est bien défini par l'annulation de polynômes en $y = ((c_{i,j}^\alpha), (a_t^\alpha))$. On vérifie de manière analogue que l'application tire en arrière une fonction régulière en une fonction régulière. □

Notons ρ le morphisme obtenu de $\mathcal{D}$ dans $\prod_{\alpha\in S} Grass_d^N$ (on rappelle que l'on travaille avec des schémas réduits de type fini sur E, pris algébriquement clos). Le tiré en arrière $\rho^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}) \xrightarrow{\rho'} \tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ de ρ par l'immersion $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}} \hookrightarrow \prod_\alpha Grass_d^N$ (on prend N suffisamment grand) est surjectif sur les E-points, par le corollaire 2.2.7 et la remarque 2.2.8. Or :

Proposition 2.2.11. *Si X et Y sont deux variétés quasi-projectives sur un corps algébriquement clos k et $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme de k-variétés surjectif sur les k-points, on a $\dim(X) \geqslant \dim(Y)$.*

Démonstration. On renvoie à [Car], proposition 2.27 (i) pour la preuve. □

On en déduit que $\dim(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}) \leqslant \dim(\rho^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}))$, mais $\rho^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}) \hookrightarrow \mathcal{D}$ est une immersion, donc on a montré que $\dim(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}) \leqslant \#((S\times I) \sqcup \tilde{A}) = \#S.\frac{d(d-1)}{2} + \sum_{\alpha\in S} \#\tilde{A}^\alpha$.

Lemme 2.2.12. *Si $\alpha \in S$, on a $\#\tilde{A}^\alpha \leqslant \#A^\alpha$.*

Démonstration. On fixe $\alpha \in S$, et pour simplifier les notations on note $\tilde{\varphi}_i^\alpha = \tilde{\varphi}_i$, $\tilde{A}^\alpha = \tilde{A}$, etc. Pour tout $q \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ soit $\tau_q \in \mathfrak{S}_d$ une permutation telle que pour tout i, $\tilde{\varphi}_i(q) = \varphi_{\tau_q(i)}(q)$. On définit les applications p et $\tilde{p}$ par

$$\begin{array}{cccc} p: & A & \longrightarrow & \frac{1}{b}\mathbb{Z}\times Q \\ & (q,i,q',i') & \longmapsto & (q,q',i') \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \tilde{p}: & \tilde{A} & \longrightarrow & \frac{1}{b}\mathbb{Z}\times Q \\ & (q,i,q',i') & \longmapsto & (q,q',i'). \end{array}$$

On a donc

$$\tilde{A} = \bigsqcup_{(q,q',i')\in\frac{1}{b}\mathbb{Z}\times Q \text{ et } q\leqslant q'} \tilde{p}^{-1}((q,q',i')) \quad \text{et} \quad A = \bigsqcup_{(q,q',i')\in\frac{1}{b}\mathbb{Z}\times Q \text{ et } q\leqslant q'} p^{-1}((q,q',\tau_{q'}(i'))).$$

Fixons donc $(q,q',i') \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}\times Q$ avec $q' \geqslant q$, et montrons que

$$\#\tilde{p}^{-1}((q,q',i')) \leqslant \#p^{-1}((q,q',\tau_{q'}(i'))).$$

L'ensemble du membre de gauche (resp. de droite) de l'inégalité s'injecte dans

$$\left\{i \in [\![1,d]\!];\ \tilde{\varphi}_i\left(q-\frac{1}{b}\right) < \mu < \tilde{\varphi}_i(q)\right\}$$

$\Bigg($ resp. est en bijection avec

$$\left\{i \in [\![1,d]\!]; (q',\tau_{q'}(i')) > (q,i) \ \text{ et } \ \varphi_i\left(q-\frac{1}{b}\right) < \mu < \varphi_i(q)\right\}\Bigg)$$

où on a posé $\mu = \tilde{\varphi}_{i'}(q') = \varphi_{\tau_{q'}(i')}(q')$.
Ces ensembles s'écrivent $\tilde{B}_1 \backslash \tilde{B}_2$ et $B_1 \backslash B_2$ respectivement avec

$$\begin{array}{rcl} \tilde{B}_1 & = & \{i\ ;\ \mu < \tilde{\varphi}_i(q)\} \\ \tilde{B}_2 & = & \left\{i\ ;\ \mu \leqslant \tilde{\varphi}_i\left(q - \frac{1}{b}\right)\right\} \\ B_1 & = & \{i\ ; \mu < \varphi_i(q)\} \\ B_2 & = & \left\{i\ ; \mu \leqslant \varphi_i\left(q - \frac{1}{b}\right)\right\} \end{array}$$

(on a utilisé pour B_1 et B_2 le fait suivant : si $(q, i, q', i') \in A$, on a $i < i'$ puisque $\varphi_1 \geqslant \cdots \geqslant \varphi_d$).
Or on a $\tilde{B}_2 \subseteq \tilde{B}_1$ et $B_2 \subseteq B_1$, τ_q induit une bijection de $\tilde{B}_1$ sur B_1 et $\tau_{q-\frac{1}{b}}$ induit une bijection de $\tilde{B}_2$ sur B_2, ainsi on a bien $\#\tilde{p}^{-1}((q, q', i')) \leqslant \#p^{-1}((q, q', \tau_{q'}(i')))$.
Donc $\#\tilde{A} \leqslant \#A$. □

On obtient :

Proposition 2.2.13. *Si $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$ donne φ après réordonnement, on a*

$$\dim(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}) \leqslant \sum_{\alpha \in S} \#A^{\alpha} + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2} = \#A + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}.$$

En suivant [Car] on définit :

Définition 2.2.14. *Pour $\varphi = (\varphi^{\alpha})_{\alpha} \in \Phi$, on appelle dimension de φ et on note* $\dim(\varphi)$ *le nombre $\#A$. On note également* $\dim(\varphi^{\alpha}) = \#A^{\alpha}$.

2.2.2 Obtention de la minoration

On fixe toujours $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$. On suppose maintenant que $\varphi(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}$ (ou plutôt on pose $\tilde{\varphi} := \varphi$).

L'idée pour obtenir une minoration de $\dim(\tilde{\mathcal{X}}_{\varphi})$ est cette fois de construire un morphisme τ d'un sous-schéma d'un espace affine dans $\tilde{\mathcal{X}}_{\varphi}$, injectif sur les E-points, puis d'utiliser

Proposition 2.2.15. *Si X et Y sont deux variétés quasi-projectives sur un corps algébriquement clos k et $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme de k-variétés injectif sur les k-points, on a* $\dim(X) \leqslant \dim(Y)$.

Démonstration. On renvoie à [Car], proposition 2.27 (ii) pour la preuve. □

Soit $\mathcal{F}$ le sous-schéma fermé réduit de $\mathbb{A}_E^{(S\times I)\sqcup A}$ dont les E-points forment le fermé de Zariski défini par les équations

$$(I_d - U'^{F\circ\alpha}(a)).\begin{pmatrix} e_1 + \sum_{j>1} c_{1,j}^{F\circ\alpha}.e_j \\ . \\ . \\ . \\ e_d \end{pmatrix} = V'^{\alpha}(a).\begin{pmatrix} \sigma(e_1 + \sum_{j>1} c_{1,j}^{\alpha}.e_j) \\ . \\ . \\ . \\ \sigma(e_d) \end{pmatrix}$$

pour $\alpha \in S$.

De même qu'au-dessus on montre (voir la preuve de la proposition 2.2.9) que si $(c_{i,j}^{\alpha}, a) \in$

$\mathcal{F}(E)$, il existe des $v_i^\alpha \in M'$ uniques (congrus à $e_i+\sum_{j>i} c_{i,j}^\alpha$ modulo $u^{1/b}$) tels que $v(v_i^\alpha - e_i) > (0,i)$ et pour chaque α,

$$\begin{pmatrix} v_1^{F\circ\alpha} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_d^{F\circ\alpha} \end{pmatrix} = U^{F\circ\alpha}(a). \begin{pmatrix} v_1^{F\circ\alpha} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_d^{F\circ\alpha} \end{pmatrix} + V^\alpha(a). \begin{pmatrix} \sigma(v_1^\alpha) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma(v_d^\alpha) \end{pmatrix}.$$

On pose ensuite

$$v_{q,i}^\alpha = \sum_{s=1}^d Q_{(q,i),s}^\alpha(a).u^q.v_s^\alpha$$

pour $(q,i) \in \tilde{V}^\alpha$, puis

$$\tau(c_{i,j}^\alpha, a) = (< w_i^\alpha \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant d >)_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in S} M$$

où $w_i^\alpha = u^{-\varphi_i^\alpha(x_i)}.\sigma(v_{x_i,i}^\alpha)$. Cela définit une flèche $\mathcal{F}(E) \to \prod_{\alpha\in S} Grass_d^N(E)$ pour N assez grand, qui induit un morphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \prod_{\alpha\in S} Grass_d^N$ de E-schémas (voir la preuve de la proposition 2.2.10). Soit $\tau^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi)$ le tiré en arrière de l'immersion $\tilde{\mathcal{X}}_\varphi \hookrightarrow \prod_\alpha Grass_d^N$.

Proposition 2.2.16. *Pour $y = (c_{i,j}^\alpha, a) \in \mathcal{F}(E)$, la collection $L = \tau(y)$ vérifie $\tilde{q}_i^\alpha(L) = \tilde{q}_i^\alpha$ et $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L) \geqslant \tilde{\varphi}_i^\alpha$ pour tous i, α.*

Démonstration. Vérifions d'abord que les $v_{q,i}^\alpha$ sont dans $\sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})$. On le montre par récurrence sur $\mu = \tilde{\varphi}_i^\alpha(q)$.
Si $q = \tilde{q}_i^\alpha$, on a

$$v_{q,i}^\alpha = w_i^{F^{-1}\circ\alpha} + \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i)} a_{q,i,q',i'}^\alpha.v_{q',i'}^\alpha$$

et si $q > \tilde{q}_i^\alpha$ on a de même

$$v_{q,i}^\alpha = u^{1/b}.v_{q-\frac{1}{b},i}^\alpha + \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i)} a_{q,i,q',i'}^\alpha.v_{q',i'}^\alpha.$$

Dans les deux cas les termes de la somme apparaissant dans le membre de droite sont dans $\sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})$.

On sait que $v(v_{q,i}^\alpha) = (q,i)$, donc on a $\tilde{q}_i^\alpha(L) \leqslant \tilde{q}_i^\alpha$. D'autre part si $\alpha_1,\ldots,\alpha_d \in E[\![u^{1/b}]\!]$, $(\alpha_i) \neq 0$, les $\alpha_i w_i^\alpha$ non nuls sont de valuation deux à deux distinctes (on a $v(\alpha_i w_i^\alpha) = (v(\alpha_i)+\tilde{q}_i^\alpha, i)$) et ainsi

$$v\left(\sum_i \alpha_i w_i^\alpha\right) = \min_i \ v(\alpha_i w_i^\alpha)$$

donc est égal à $(v(\alpha_{i_0})+\tilde{q}_{i_0}^\alpha, i_0)$ pour un certain i_0. Mais $v(\alpha_{i_0}) \geqslant 0$, ce qui montre $\tilde{q}_i^\alpha(L) \geqslant \tilde{q}_i^\alpha$.

Montrons par récurrence descendante sur $\mu = \tilde{\varphi}_i^\alpha(q)$ que $\sigma(v_{q,i}^\alpha) \in u^{\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)} L^\alpha$, ce qui assure $\tilde{\varphi}_i^\alpha(L)(q) \geqslant \tilde{\varphi}_i^\alpha(q)$.
Si μ est assez grand on a $\tilde{\varphi}_i^\alpha(q) = bq - \tilde{q}_i^{F\circ\alpha}$, d'où $u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)}.\sigma(v_{q,i}^\alpha) = w_i^\alpha \in L^\alpha$. Pour le pas de

récurrence on écrit

$$\begin{aligned}
u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)}.\sigma(v_{q,i}^\alpha) &= u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)-1}.\sigma(u^{1/b}.v_{q,i}^\alpha) \\
&= u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)-1}.\sigma\left(v_{q+\frac{1}{b},i}^\alpha - \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q+\frac{1}{b},i)} a_{q+\frac{1}{b},i,q',i'}^\alpha.v_{q',i'}^\alpha\right) \\
&= u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)-1+\tilde{\varphi}_i^\alpha(q+\frac{1}{b})}.\underbrace{u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q+\frac{1}{b})}.\sigma(v_{q+\frac{1}{b},i}^\alpha)}_{\in L^\alpha} \\
&\quad - \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q+\frac{1}{b},i)} \sigma(a_{q+\frac{1}{b},i,q',i'}^\alpha).u^{-\tilde{\varphi}_i^\alpha(q)-1+\tilde{\varphi}_{i'}^\alpha(q')}.\underbrace{u^{-\tilde{\varphi}_{i'}^\alpha(q')}.\sigma(v_{q',i'}^\alpha).}_{\in L^\alpha}
\end{aligned}$$

Cela démontre la proposition. $\square$

Notons

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\geqslant\varphi}(E) = \prod_\alpha \{ \text{ collection } (L^\alpha) \ ; \ \forall\alpha, \forall i, \tilde{q}_i^\alpha(L) = \tilde{q}_i^\alpha \text{ et } \tilde{\varphi}_i^\alpha(L) \geqslant \varphi_i^\alpha \}.$$

La condition définissant $\tilde{\mathcal{X}}_\varphi(E)$ dans $\tilde{\mathcal{X}}_{\geqslant\varphi}(E)$ est ouverte. Ainsi $\tilde{\mathcal{X}}_\varphi(E)$ est l'intersection d'un ouvert U de $\prod_\alpha Grass_d^N(E)$ avec $\tilde{\mathcal{X}}_{\geqslant\varphi}(E)$, et on obtient que $\tau^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi)(E) = \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi(E)) = \tau^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathcal{F}(E)$. Donc $\tau^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi)$ est un ouvert (non vide) de $\mathcal{F}$.
On fixe $(c_{i,j}^\alpha, a) \in \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi)(E)$, et on définit $m : \mathbb{A}_E^{A\backslash A_{eq}} \longrightarrow \mathbb{A}_E^{(S\times I)\sqcup A}$ par

$$m((a'_t)_{t\in A\backslash A_{eq}}) = (c_{i,j}^\alpha, (a_t)_{t\in A_{eq}}, (a'_t)_{t\in A\backslash A_{eq}}),$$

donc m se factorise par $\mathcal{F}$, puisque les équations définissant $\mathcal{F}$ ne font intervenir que les $c_{i,j}^\alpha$ et les a_t pour $t \in A_{eq}$ (cela découle du lemme 2.2.2 et de la définition des polynômes $U_{i,s}^\alpha$ et $V_{i,s}^\alpha$). La situation est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{A\backslash A_{eq}} \arrow[r, "m"] \arrow[dr] & \mathbb{A}^{(S\times I)\sqcup A} & \\
& \mathcal{F} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\tau"] & \prod_{\alpha\in S} Grass_d^N \\
& \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi) \arrow[u, hook] \arrow[r] & \tilde{\mathcal{X}}_\varphi \arrow[u, hook] \\
\mathcal{G} = m^{-1}(\tau^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi)) \arrow[uuu, hook] \arrow[ur] \arrow[urr, bend right=10] & &
\end{tikzcd}$$

Le schéma $\mathcal{G}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{A}^{A\backslash A_{eq}}$ donc est de dimension $\#A - \#A_{eq}$, ainsi si la flèche $\mathcal{G} \to \tilde{\mathcal{X}}_\varphi$ est injective sur les E-points, cela montre par la proposition 2.2.15 que $\dim(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi) \geqslant \#A - \#A_{eq} = \dim(\varphi) - \#A_{eq}$.

Proposition 2.2.17. *Soient $(c_{i,j}^\alpha, a), (d_{i,j}^\alpha, a') \in \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi)(E)$. On suppose que $(c_{i,j}^\alpha) = (d_{i,j}^\alpha)$ et $a_t = a'_t$ pour $t \in A_{eq}$ et $\tau(c_{i,j}^\alpha, a) = \tau(c_{i,j}^\alpha, a')$. Alors on a aussi $a_t = a'_t$ pour $t \in A\backslash A_{eq}$.*

Démonstration. On note $L = \tau(c_{i,j}^\alpha, a) = \tau(c_{i,j}^\alpha, a')$. On a les $v_{q,i}^\alpha$, v_i^α, w_i^α et $v_{q,i}^{\prime\alpha}$, $v_i^{\prime\alpha}$, $w_i^{\prime\alpha}$ associés à $(c_{i,j}^\alpha, a)$ et $(c_{i,j}^\alpha, a')$.
Les hypothèses assurent que $v_{\tilde{q}_i^\alpha,i}^\alpha$ est congru à $v_{\tilde{q}_i^\alpha,i}^{\prime\alpha}$ modulo $u^{\tilde{q}_i^\alpha+\frac{1}{b}}$ et $a_{q,i,q',i'}^\alpha = a_{q,i,q',i'}^{\prime\alpha}$ pour

$q' = q$. Si $(q,i) \in \tilde{V}^\alpha$, $v^\alpha_{q,i} = \sum_{s=1}^d Q^\alpha_{(q,i),s}(a).u^{q-\tilde{q}^\alpha_s}.v^\alpha_{\tilde{q}^\alpha_s,s}$. La valeur modulo $u^{1/b}$ des $Q^\alpha_{(q,i),s}(a)$ ne dépend que des a_t pour $t \in A^\alpha_{eq}$, et les $v^\alpha_{\tilde{q}^\alpha_s,s}$ sont congrus à $v'^\alpha_{\tilde{q}^\alpha_s,s}$ modulo $u^{q+1/b}$. Ainsi modulo $u^{q+1/b}$ on a

$$\begin{aligned} v^\alpha_{q,i} &\equiv \sum_{s=1}^d Q^\alpha_{(q,i),s}(a').u^{q-\tilde{q}^\alpha_s}.v'^\alpha_{\tilde{q}^\alpha_s,s} \\ &\equiv v'^\alpha_{q,i}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $v^\alpha_{q,i}$ est congru à $v'^\alpha_{q,i}$ modulo $u^{q+n/b}$ pour tout $(q,i) \in \tilde{V}^\alpha$ et $a^\alpha_{q,i,q',i'} = a'^\alpha_{q,i,q',i'}$ si $q' < q + n/b$. Montrons que c'est vrai au rang $n+1$.

On travaille encore une fois par récurrence sur $\varphi^\alpha_i(q)$. Soit $(q,i) \in \tilde{V}^\alpha$.

Si $q = \tilde{q}^\alpha_i$, on a

$$\begin{aligned} v^\alpha_{q,i} - v'^\alpha_{q,i} &= u^{-\varphi_i^{F^{-1}\circ\alpha}(x_i)}.\sigma(v^{F^{-1}\circ\alpha}_{x_i,i} - v'^{F^{-1}\circ\alpha}_{x_i,i}) + \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i)} (a^\alpha_{q,i,q',i'}.v^\alpha_{q',i'} - a'^\alpha_{q,i,q',i'}.v'^\alpha_{q',i'}) \\ &\equiv \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i),\ q'=q+\frac{n}{b}} (a^\alpha_{q,i,q',i'} - a'^\alpha_{q,i,q',i'}).v^\alpha_{q',i'} \pmod{u^{q+\frac{n+1}{b}}} \end{aligned}$$

car $v^{F^{-1}\circ\alpha}_{x_i,i} \equiv v'^{F^{-1}\circ\alpha}_{x_i,i} \pmod{u^{x_i+n/b}}$ entraîne $\sigma(v^{F^{-1}\circ\alpha}_{x_i,i}) \equiv \sigma(v'^{F^{-1}\circ\alpha}_{x_i,i}) \pmod{u^{bx_i+n}}$ et *a fortiori* $\sigma(v^{F^{-1}\circ\alpha}_{x_i,i}) \equiv \sigma(v'^{F^{-1}\circ\alpha}_{x_i,i}) \pmod{u^{bx_i+\frac{n+1}{b}}}$ d'une part, et $\begin{cases} a^\alpha_{q,i,q',i'} = a'^\alpha_{q,i,q',i'} \\ v^\alpha_{q',i'} \equiv v'^\alpha_{q',i'} \pmod{u^{q'+\frac{n+1}{b}}} \end{cases}$ si $(q',i') \in \tilde{A}^\alpha(q,i)$ avec $q' < q+n/b$, d'autre part (par l'hypothèse de récurrence).

Ainsi, s'il existe $(q',i') \in \tilde{A}^\alpha(q,i)$ tel que $q' = q + \frac{n}{b}$ et $a^\alpha_{q,i,q',i'} \neq a'^\alpha_{q,i,q',i'}$, on prend (q',i') minimal, et on a alors $v(v^\alpha_{q,i} - v'^\alpha_{q,i}) = (q',i')$, or $v^\alpha_{q,i} - v'^\alpha_{q,i} \in \sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha})$ et vérifie $\sigma(v^\alpha_{q,i} - v'^\alpha_{q,i}) \in u^{\varphi^\alpha_i(q)}L^\alpha$, donc $\varphi^\alpha_{i'}(q') = \tilde{\varphi}_{i'}(L)(q') \geqslant \varphi^\alpha_i(q)$, contradiction (notons que $\tilde{\varphi}(L) = \varphi$ puisque $(c^\alpha_{i,j}, a)$ et $(d^\alpha_{i,j}, a')$ sont pris dans $\tau^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi)(E)$).
On en déduit que $v^\alpha_{q,i} \underset{u^{q+\frac{n+1}{b}}}{\equiv} v'^\alpha_{q,i}$.

Si $q > \tilde{q}^\alpha_i$, on écrit

$$v^\alpha_{q,i} - v'^\alpha_{q,i} = u^{1/b}.(v^\alpha_{q-\frac{1}{b},i} - v'^\alpha_{q-\frac{1}{b},i}) + \sum_{(q',i')\in\tilde{A}^\alpha(q,i)} (a^\alpha_{q,i,q',i'}.v^\alpha_{q',i'} - a'^\alpha_{q,i,q',i'}.v'^\alpha_{q',i'})$$

et on fait un raisonnement analogue. □

On cherche maintenant à majorer $\#A_{eq}$ afin d'obtenir une minoration de $\dim(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi)$.

Proposition 2.2.18. *Pour $\alpha \in S$ on a $\#A^\alpha_{eq} \leqslant \frac{d(d-1)}{2}$.*

Démonstration. Si $d = 1$, on a $A^\alpha_{eq} = \varnothing$. Supposons $d \geqslant 2$ et le résultat démontré pour $d-1$. Il suffit par la proposition 2.1.23 de montrer que le nombre $m = \#\{(q,i,q,i') \in A^\alpha_{eq}\ ;\ i = 1\}$ est inférieur strictement à d.

Or si on note $a_1 < \ldots < a_l$ les points de discontinuité de φ_1^α on a

$$\begin{aligned} m &= \sum_{q\in\frac{1}{b}\mathbb{Z},q\geqslant q_1} \#\{i\ ;\ (q,i)\in A^\alpha(q,1)\} \\ &= \sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z},\varphi_1^\alpha(a_s-\frac{1}{b})<\mu<\varphi_1^\alpha(a_s)} \#\{i\ ;\ \varphi_i^\alpha(a_s)=\mu\}\right) \\ &= \sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z},\varphi_1^\alpha(a_s-\frac{1}{b})<\mu<\varphi_1^\alpha(a_s)} \#\underbrace{\{j\ ;\ \psi_j^\alpha(\mu)=a_s\}}_{E(s,\mu)}\right). \end{aligned}$$

Mais les $E(s,\mu)$ sont disjoints deux à deux : soient (s,μ), (s',μ') deux indices.
Si $s=s'$, il est immédiat que $E(s,\mu)\cap E(s,\mu')=\varnothing$.
Si $s<s'$ et $j\in E(s,\mu)$ alors (corollaire 2.1.18) $\psi_j^\alpha(\mu')\geqslant\psi_j^\alpha(\mu)+\frac{\mu'-\mu}{b}=a_s+\frac{\mu'-\mu}{b}$. Mais

$$\begin{aligned} \mu'-\mu &> \varphi_1^\alpha(a_{s'}-\frac{1}{b})-\varphi_1^\alpha(a_s)+1 \\ &\geqslant b(a_{s'}-a_s) \end{aligned}$$

donc on ne peut avoir $\psi_j^\alpha(\mu')=a_{s'}$. Voir la figure 2.4 pour une illustration.

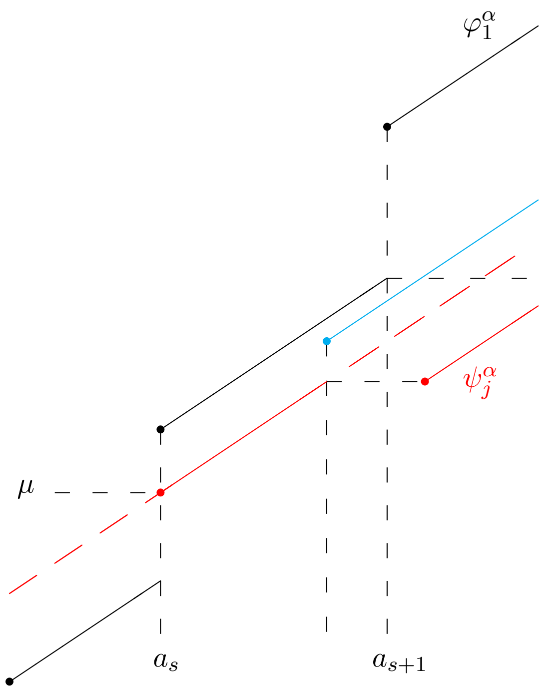

FIGURE 2.4 – Illustration de la situation

Ainsi si E est la réunion disjointe des $E(s,\mu)$, on a $m=\#E$. Mais $E\subsetneq [\![1,d]\!]$ (si on avait $E=[\![1,d]\!]$ alors $\{j\ ;\ \psi_j^\alpha(\varphi_1^\alpha(a_l))=a_l\}=\varnothing$, contradiction). $\square$

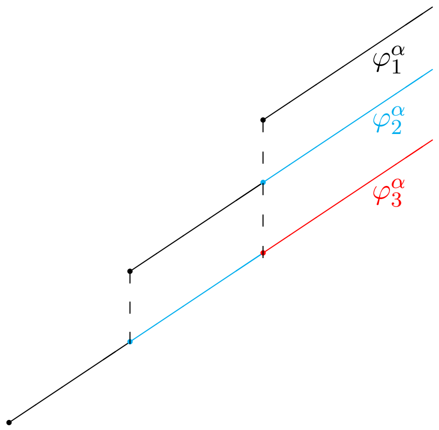

FIGURE 2.5 – Une configuration optimale

Remarque 2.2.19. La figure 2.5 (pour $d = 3$) montre qu'on peut avoir $\#A_{eq}^\alpha = \frac{d(d-1)}{2}$.

On en déduit :

Proposition 2.2.20. *Si $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, on a*

$$\dim(\tilde{\mathcal{X}}_\varphi) \geqslant \dim(\varphi) - \#A_{eq} \geqslant \dim(\varphi) - \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}.$$

2.2.3 L'encadrement obtenu

On peut maintenant donner un encadrement de la dimension des strates $\mathcal{X}_\varphi$.

Théorème 2.2.21. *Soit $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$. Alors*

$$|\dim(\mathcal{X}_\varphi) - \dim(\varphi)| \leqslant \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}.$$

Démonstration. Par définition (voir 2.1.28), la variété $\mathcal{X}_\varphi$ est la réunion disjointe

$$\coprod_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}, \varphi(\tilde{\varphi}) = \varphi} \tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$$

donc la dimension $\dim(\mathcal{X}_\varphi)$ est la borne supérieure des dimensions des variétés $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ de cette réunion. Or par la proposition 2.2.13 pour tout $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}}$, on a $\dim(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}) \leqslant \dim(\varphi) + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}$. Mais la proposition 2.2.20 montre qu'en faisant le choix $\tilde{\varphi} = \varphi$ on a la minoration $\dim(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}) \geqslant \dim(\varphi) - \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}$. $\square$

Chapitre 3

Réduction à un problème d'optimisation linéaire

On a, dans le chapitre 2, stratifié les variétés $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$ étudiées. Considérons par exemple les variétés $\mathcal{X}_\mu$. La stratification par les $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$ donne $\dim(\mathcal{X}_\mu) = \sup_{\tilde{\varphi}\in\tilde{\Phi}_{\mathbb{Z}},\ \mu(\tilde{\varphi})=\mu} \dim(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}) = \sup_{\varphi\in\Phi_{\mathbb{Z}},\ \mu(\varphi)=\mu} \dim(\mathcal{X}_\varphi)$. L'objet du présent chapitre est de transformer le calcul de la borne supérieure $\sup_{\varphi\in\Phi_{\mathbb{Z}},\ \mu(\varphi)=\mu} \dim(\mathcal{X}_\varphi)$ en un problème d'optimisation linéaire.

On commence par montrer que l'ensemble Φ est en bijection naturelle avec un convexe Q de $\mathbb{R}^{S\times I}$ (rappelons la notation $I = \{(i,j) \in [\![1,d]\!]\ ;\ i \leqslant j\}$). L'ensemble $\Phi_{\mathbb{Z}}$ correspond alors à l'intersection de Q avec un réseau de $\mathbb{R}^{S\times I}$. On montre ensuite que la fonction $\dim(\varphi)$ est la restriction à Φ d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{S\times I}$. Enfin, la fonction $\varphi \mapsto \mu(\varphi)$ est elle aussi la restriction d'une fonction linéaire à $\mathbb{R}^{S\times I}$. On termine en mettant en place le cadre pour les problèmes d'optimisation à étudier.

3.1 L'ensemble des données combinatoires est un convexe

Dans cette section, on montre que la donnée d'un élément $\varphi \in \Phi$ correspond à la donnée de $(\#S)d(d+1)$ paramètres $q^\alpha_{i,j}(\varphi), \mu^\alpha_{i,j}(\varphi) \in \mathbb{R}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d$, vérifiant certaines inégalités. Ainsi les éléments de Φ correspondent aux éléments d'un convexe $K \subseteq (\mathbb{R}^{S\times I})^2$ défini par ces inégalités.

3.1.1 Les paramètres $q^\alpha_{i,j}(\varphi)$ et $\mu^\alpha_{i,j}(\varphi)$

Par convention pour $\varphi \in \Phi$ on prolonge les fonctions ψ^α_i, ψ^α_j à $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ en posant $\psi^\alpha_i(-\infty) = \psi^\alpha_j(-\infty) = -\infty$.

Définition 3.1.1. *Soit $\varphi \in \Phi$.*
Pour $\alpha \in S$ et $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d$, on note $q^\alpha_{i,j}(\varphi)$ la borne inférieure des $q \in \mathbb{R}$ tels que en posant $\mu = \varphi^\alpha_i(q)$ on ait $\psi^\alpha_j(\mu) > q$ ou ($\psi^\alpha_j(\mu) = q$ et $\#\{i' \leqslant i\ ;\ \varphi^\alpha_{i'}(q) = \mu\} \leqslant \#\{j' \leqslant j\ ;\ \psi^\alpha_{j'}(\mu) = q\}$).
De même on note $\mu^\alpha_{i,j}(\varphi)$ la borne inférieure des $\mu \in \mathbb{R}$ tels que en posant $q = \psi^\alpha_j(\mu)$ on ait $\varphi^\alpha_i(q) > \mu$ ou ($\varphi^\alpha_i(q) = \mu$ et $\#\{i' \leqslant i\ ;\ \varphi^\alpha_{i'}(q) = \mu\} \leqslant \#\{j' \leqslant j\ ;\ \psi^\alpha_{j'}(\mu) = q\}$).
On pose également $q^\alpha_{i,i-1}(\varphi) = \mu^\alpha_{j+1,j}(\varphi) = +\infty$ pour $i, j \in [\![1,d]\!]$.

Remarque 3.1.2. On obtient immédiatement $q^\alpha_{i,j} \leqslant q^\alpha_{i,j-1}$ et $\mu^\alpha_{i,j} \leqslant \mu^\alpha_{i+1,j}$ pour $(i,j) \in I$.

La définition des $q^\alpha_{i,j}(\varphi)$ et des $\mu^\alpha_{i,j}(\varphi)$ est faite pour obtenir un découpage comme dans les figures 3.1 et 3.2 (où on a pris $d = 3$).

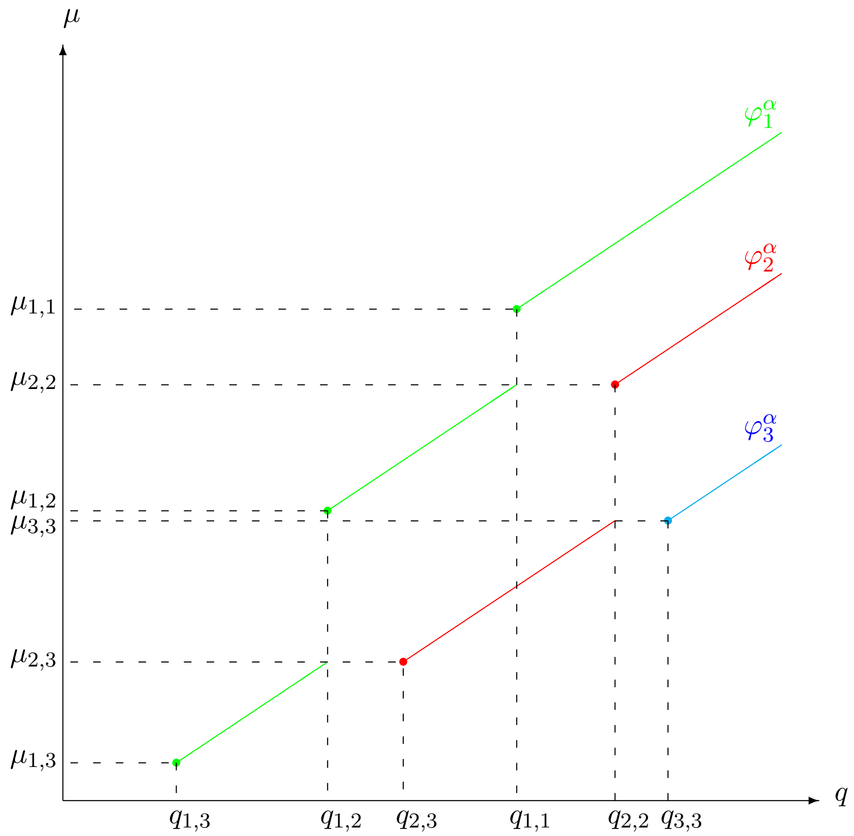

FIGURE 3.1 – Un premier exemple de paramétrisation.

Proposition 3.1.3. *Soit $\varphi \in \Phi$. Pour $\alpha \in S$ et $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d$, les fonctions φ_i^α et ψ_j^α induisent des bijections réciproques de $[q_{i,j}^\alpha(\varphi), q_{i,j-1}^\alpha(\varphi)[$ sur $[\mu_{i,j}^\alpha(\varphi), \mu_{i+1,j}^\alpha(\varphi)[$.*
De plus les φ_i^α (respectivement les ψ_j^α) prennent des valeurs finies exactement sur $[q_{i,d}^\alpha, +\infty[$ (resp. sur $[\mu_{1,j}^\alpha, +\infty[$).

Démonstration. On travaille par récurrence sur d, en utilisant la proposition 2.1.23. On a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.4. *On suppose $d \geqslant 2$. Soit $\varphi = (\varphi_i^\alpha) \in \Phi$, on définit $\varphi' \in \Phi$ par $\varphi_i'^\alpha = \varphi_{i+1}^\alpha$. Alors pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d-1$ on a*

$$q_{i,j}^\alpha(\varphi') = q_{i+1,j+1}^\alpha(\varphi) \text{ et } \mu_{i,j}^\alpha(\varphi') = \mu_{i+1,j+1}^\alpha(\varphi).$$

Démonstration. Pour simplifier les notations on écrit $\varphi_i^\alpha = \varphi_i$, $\psi_j^\alpha = \psi_j$, $q_{i,j}^\alpha(\varphi) = q_{i,j}$.
Notons $E_{i,j}$ l'ensemble des $q \in \mathbb{R}$ tels que en posant $\varphi_i(q) = \mu$ on ait $\psi_j(\mu) > q$ ou ($\psi_j(\mu) = q$ et $\#\{i' \leqslant i \ ; \ \varphi_{i'}(q) = \mu\} \leqslant \#\{j' \leqslant j \ ; \ \psi_{j'}(\mu) = q\}$). On note $E'_{i,j}$ l'analogue pour les φ'_i.

Soient $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d-1$. Montrons que $E'_{i,j} = E_{i+1,j+1}$. Soit $q \in \mathbb{R}$ et $\mu = \varphi'_i(q)$. Notons $x_1 < \cdots < x_l$ les réels q' tels que $\{i' \in [\![1, d]\!] \ ; \ \varphi_{i'}(q') = \mu\} \neq \emptyset$. Le réel q est l'un des x_s, disons x_{s_0}. On pose $e_s = \#\{i' \in [\![1, d]\!] \ ; \ \varphi_{i'}(x_s) = \mu\}$. Les $\psi_j(\mu)$ sont donc les nombres $-\infty, x_1, \ldots, x_l$ pris avec multiplicité $d - \sum_s e_s, e_1, \ldots, e_l$.

La définition de $E'_{i,j}$ et $E_{i+1,j+1}$ fait apparaître deux cas. Pour le premier cas, si $\psi'_j(\mu) > q$ on a $\psi_{j+1}(\varphi_{i+1}(q)) > q$ car, d'après la preuve de la proposition 2.1.23, $\psi'_j(\mu) > -\infty$ implique

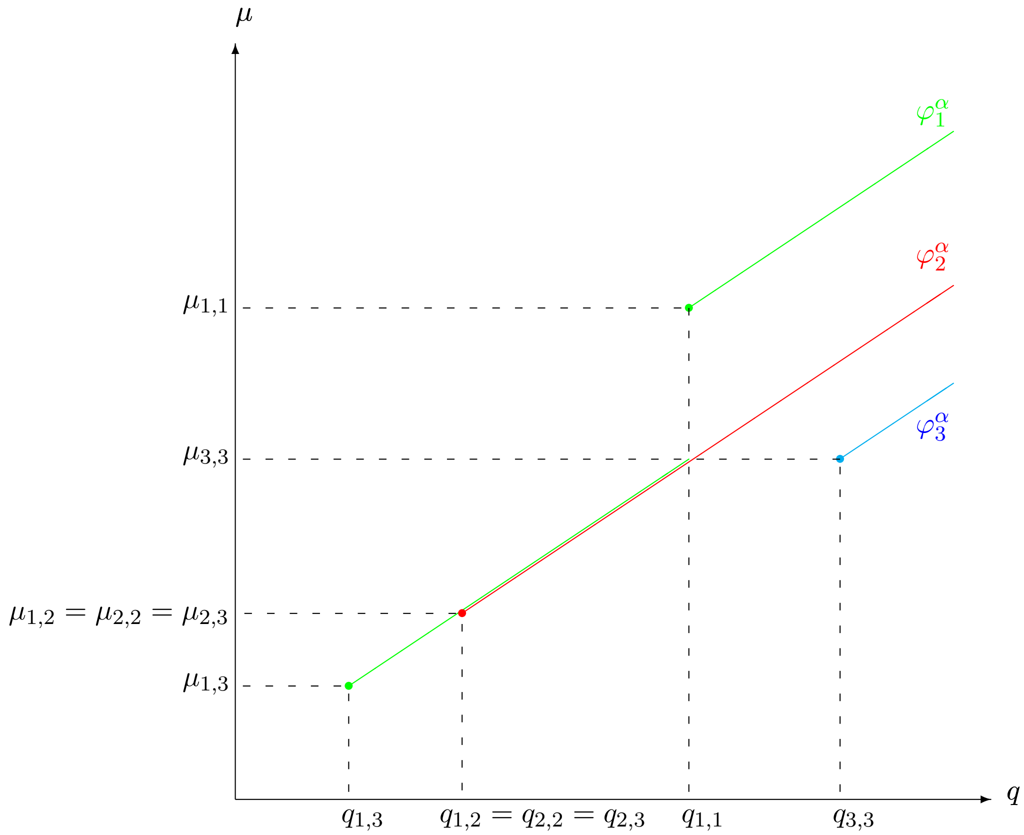

FIGURE 3.2 – Deuxième exemple de paramétrisation. Ici φ_1^α et φ_2^α coïncident sur l'intervalle $[q_{1,2}, q_{1,1}[$.

$\psi'_j(\mu) = \psi_{j+1}(\mu)$.
Réciproquement si $\psi_{j+1}(\varphi_{i+1}(q)) > q$, on ne peut avoir $\psi_j(\mu) = -\infty$ car cela impliquerait $\psi_{j'}(\mu) = -\infty$ pour $j' \leqslant j$, ce qui contredit $\#\{j' \in [\![1, d]\!] \ ; \ \psi_{j'}(\mu) = q\} > 0$. Cela entraîne $\psi'_j(\mu) = \psi_{j+1}(\mu)$, d'où $\psi'_j(\mu) > q$.

Pour le second cas, on a encore $\varphi_{i+1}(q) = \varphi'_i(q) = \mu$. Le tableau suivant donne les valeurs des $\psi_{j'}(\mu)$ avec multiplicité :

valeur	$-\infty$	x_1	$\cdots$	$x_{s_0} = q$	$\cdots$	x_l
multiplicité	$d - \sum_s e_s$	e_1	$\cdots$	e_{s_0}	$\cdots$	e_l

Ainsi $\{i'' \leqslant i+1 \ ; \ \varphi_{i''}(q) = \mu\} = [\![\sum_{s=1}^{s_0-1} e_s + 1, i+1]\!]$ et est de cardinal $i + 1 - \sum_{s=1}^{s_0-1} e_s$, tandis que $\#\{i' \leqslant i \ ; \ \varphi'_{i'}(q) = \mu\} = \begin{cases} i + 1 - \sum_{s=1}^{s_0-1} e_s & \text{si } \varphi_1(q) \neq \mu \\ i - \sum_{s=1}^{s_0-1} e_s & \text{si } \varphi_1(q) = \mu \end{cases}$.
Il y a deux possibilités :

- Si $\mu \notin \varphi_1(\mathbb{R})$, on a $\psi'_j(\mu) = \psi_{j+1}(\mu)$ donc $\psi'_j(\mu) = q$ ssi $\psi_{j+1}(\mu) = q$. Supposons cette dernière condition vérifiée. Alors $\{j'' \leqslant j+1 \ ; \ \psi_{j''}(\mu) = q\} = [\![d + 1 - \sum_{s=s_0}^{l} e_s, j+1]\!]$. Mais 1 n'est pas dans ce dernier ensemble (cela forcerait μ à être dans $\varphi_1(\mathbb{R})$). On obtient
$$\#\{i' \leqslant i \ ; \ \varphi'_{i'}(q) = \mu\} = \#\{i'' \leqslant i+1 \ ; \ \varphi_{i''+1}(q) = \mu\}$$

et
$$\#\{j' \leqslant j \ ; \ \psi'_{j'}(\mu) = q\} = \#\{j'' \leqslant j+1 \ ; \ \psi_{j''+1}(\mu) = q\}$$
donc $q \in E'_{i,j}$ ssi $q \in E_{i+1,j+1}$.

- Si $\mu \in \varphi_1(\mathbb{R})$, alors $\varphi_1(x_1) = \mu$. Supposons d'abord que $q \in E'_{i,j}$ avec $\psi'_j(\mu) = q$. On a alors $\psi_{j+1}(\mu) = q$. Il faut montrer
$$(i) \ \ \#\{i'' \leqslant i+1 \ ; \ \varphi_{i''}(q) = \mu\} \leqslant \#\{j'' \leqslant j+1 \ ; \ \psi_{j''}(\mu) = q\}$$
sachant
$$(ii) \ \ \#\{i' \leqslant i \ ; \ \varphi'_{i'}(q) = \mu\} \leqslant \#\{j' \leqslant j \ ; \ \psi'_{j'}(\mu) = q\}.$$
Dans cette seconde possiblité on a le tableau suivant pour les valeurs des $\psi'_{j'}(\mu)$:

valeur	$-\infty$	x_1	$\cdots$	$x_{s_0} = q$	$\cdots$	x_l
multiplicité	$d - \sum_s e_s$	$e_1 - 1$	$\cdots$	e_{s_0}	$\cdots$	e_l

En distinguant suivant que $x_1 = q$ ou non, on vérifie bien que (ii) entraîne (i) et donc que $q \in E_{i+1,j+1}$.
Réciproquement, supposons que $q \in E_{i+1,j+1}$ avec $\psi_{j+1}(\mu) = q$. On a (i), *i.e.* $i + 1 - \sum_{s=1}^{s_0-1} e_s \leqslant j + 1 - d + \sum_{s=s_0}^{l} e_s$ ce qui assure $j \geqslant d - \sum_s e_s + i \geqslant d - \sum_s e_s + 1$ donc $\psi'_j(\mu) = \psi_{j+1}(\mu) = q$. Il reste à vérifier (ii), ce qui se fait à nouveau en distinguant suivant que $x_1 = q$ ou non.

Cela conclut le second cas, et l'égalité $E'_{i,j} = E_{i+1,j+1}$ donne $q'_{i,j} = q_{i+1,j+1}$. Enfin on démontre de la même façon que les $\mu'_{i,j}$ sont égaux aux $\mu_{i+1,j+1}$. □

La proposition est évidente pour $d = 1$.

Si $d \geqslant 2$ et si on suppose la proposition démontrée pour $d-1$, soient $\varphi \in \Phi$ et $j \in [\![2, d]\!]$. Montrons que φ_1 et ψ_j induisent des bijections réciproques de $[q_{1,j}, q_{1,j-1}[$ sur $[\mu_{1,j}, \mu_{2,j}[$.

On a $q_{1,j} = inf\{q \in \mathbb{R} \ ; \ \psi_j(\varphi_1(q)) \geqslant q\}$. Par continuité à droite et croissance de φ_1 et ψ_j on obtient $\psi_j(\varphi_1(q_{1,j})) \geqslant q_{1,j}$. Si $q \geqslant q_{1,j}$, on a
$$\psi_j(\varphi_1(q)) \geqslant \psi_j(\varphi_1(q_{1,j}) + b(q - q_{1,j})) \geqslant \psi_j(\varphi_1(q_{1,j})) + q - q_{1,j} \geqslant q.$$
On en déduit que $[q_{1,j}, q_{1,j-1}[$ est exactement l'ensemble des réels tels que $\psi_j(\varphi_1(q)) = q$ et $\psi_{j-1}(\varphi_1(q)) < q$.
De même on a $[\mu_{1,j}, +\infty[= \{\mu \in \mathbb{R} \ ; \ \varphi_1(\psi_j(\mu)) \geqslant \mu\}$, et $\mu < \mu_{2,j}$ est équivalent à (avec $q = \psi_j(\mu)$)
$$\begin{cases} \varphi_2(\psi_j(\mu)) \leqslant \mu \\ \varphi_2(\psi_j(\mu)) = \mu \Rightarrow \big(\#\{i' \leqslant 2 \ ; \ \varphi_{i'}(q) = \mu\} > \#\{j' \leqslant j \ ; \ \psi_{j'}(\mu) = q\}\big) . \end{cases}$$
On montre d'abord que l'image de $\varphi_1|_{[q_{1,j}, q_{1,j-1}[}$ est dans $[\mu_{1,j}, \mu_{2,j}[$: soit $q \in [q_{1,j}, q_{1,j-1}[$, $\mu = \varphi_1(q)$. On sait que $\psi_j(\mu) = q$ donc $\varphi_1(\psi_j(\mu)) = \mu$ et $\mu \geqslant \mu_{1,j}$. On a également $\varphi_2(\psi_j(\mu)) \leqslant \varphi_1(q) = \mu$ et si il y a égalité alors on a bien
$$(iii) \quad \# \underbrace{\{i' \leqslant 2 \ ; \ \varphi_{i'}(q) = \mu\}}_{\{1,2\}} > \# \underbrace{\{j' \leqslant j \ ; \ \psi_{j'}(\mu) = q\}}_{\{j\} \text{ car } \psi_{j-1}(\mu) < q} .$$

Donc $\mu \in [\mu_{1,j}, \mu_{2,j}[$. Notons que $\psi_j \circ \varphi_1 = Id$ sur $[q_{1,j}, q_{1,j-1}[$.

Montrons maintenant que ψ_j envoie $[\mu_{1,j}, \mu_{2,j}[$ dans $[q_{1,j}, q_{1,j-1}[$ et que $\varphi_1 \circ \psi_j = Id$ sur $[\mu_{1,j}, \mu_{2,j}[$: soit $\mu \in [\mu_{1,j}, \mu_{2,j}[$ et $q = \psi_j(\mu)$. On sait que $\varphi_1(q) \geqslant \mu$ donc $\psi_j(\varphi_1(q)) \geqslant \psi_j(\mu) = q$, ainsi $q \geqslant q_{1,j}$.
Si $\varphi_2(q) < \mu$, on a $\varphi_1(q) = \mu$. Sinon $\varphi_2(q) = \mu$ et l'inégalité (iii) implique là encore $\varphi_1(q) = \mu$. Ainsi on a toujours $\varphi_1(q) = \mu$.
Il reste à montrer que $\psi_{j-1}(\mu) < q$. On sait que $\psi_{j-1}(\mu) \leqslant q$. On distingue à nouveau les deux cas précédents : si $\varphi_2(q) < \mu$ alors $\#\{i \ ; \ \varphi_i(q) = \mu\} = 1 = \#\{j' \ ; \ \psi_{j'}(\mu) = q\}$ donc $\psi_{j-1}(\mu) \neq q$. Sinon $\varphi_2(q) = \mu$ et (iii) empêchent que $\psi_{j-1}(\mu) = q$. On a bien $q < q_{1,j-1}$.

Des deux paragraphes précédents on déduit que φ_1 et ψ_j induisent des bijections réciproques de $[q_{1,j}, q_{1,j-1}[$ sur $[\mu_{1,j}, \mu_{2,j}[$. Le même genre de raisonnement montre que φ_1 et ψ_1 induisent des bijections réciproques de $[q_{1,1}, +\infty[$ sur $[\mu_{1,1}, +\infty[$. On a de plus $[q_{1,d}, +\infty[= \{q \in \mathbb{R} \ ; \ \psi_d(\varphi_1(q)) \geqslant q\} = \varphi_1^{-1}(\mathbb{R})$ et $[\mu_{1,j}, +\infty[= \{\mu \in \mathbb{R} \ ; \ \varphi_1(\psi_j(\mu)) \geqslant \mu\} = \psi_j^{-1}(\mathbb{R})$.

L'hypothèse de récurrence et le lemme 3.1.4 complètent la preuve pour le rang d. □

Remarque 3.1.5. Dans la proposition 3.1.3 on ne prétend pas que les intervalles soient non-vides, *i.e.* on peut avoir $q^\alpha_{i,j} = q^\alpha_{i,j-1}$ ou $\mu^\alpha_{i,j} = \mu^\alpha_{i+1,j}$.

Le corollaire suivant donne une interprétation des nombres $\mu^\alpha_{1,j}$ lorsque $\varphi \in \Phi$ provient d'une collection (L^α) de réseaux.

Corollaire 3.1.6. *Si $\varphi \in \Phi$, les nombres $\mu^\alpha_{1,j}(\varphi)$ sont les nombres $\mu^\alpha_j(\varphi)$ de la définition 2.1.24. En particulier, si $\varphi = \varphi(L)$ pour une collection $L = (L^\alpha)$ de réseaux de $M = E(\!(u)\!)^d$, le nombre $\mu^\alpha_{1,j}(\varphi)$ est le j-ième diviseur élémentaire de $\sigma(\sigma^*(L^{F^{-1}\circ\alpha}))$ par rapport à L^α.*

Démonstration. La première assertion est immédiate par la proposition 3.1.3 et la définition 2.1.24 des nombres $\mu^\alpha_j(\varphi)$. Pour la deuxième on utilise la proposition 2.1.10. □

Corollaire 3.1.7. *Si $\varphi = (\varphi^\alpha_i) \in \Phi$, les fonctions φ^α_i et ψ^α_j sont données pour $q, \mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ par*

$$\varphi^\alpha_i(q) = \begin{cases} -\infty & si\ q < q^\alpha_{i,d} \\ b(q - q^\alpha_{i,j}) + \mu^\alpha_{i,j} & si\ q \in [q^\alpha_{i,j}, q^\alpha_{i,j-1}[\ pour\ un\ j \in [\![i, d]\!] \end{cases}$$

et

$$\psi^\alpha_j(\mu) = \begin{cases} -\infty & si\ \mu < \mu^\alpha_{1,j} \\ b^{-1}(\mu - \mu^\alpha_{i,j}) + q^\alpha_{i,j} & si\ \mu \in [\mu^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i+1,j}[\ pour\ un\ i \in [\![1, j]\!] \end{cases}.$$

Démonstration. Si $(i,j) \in I$, φ^α_i et ψ^α_j induisent des bijections réciproques de $[q^\alpha_{i,j}, q^\alpha_{i,j-1}[$ sur $[\mu^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i+1,j}[$ par la proposition 3.1.3. Mais φ^α_i et ψ^α_j sont affines par morceaux de pente b et b^{-1} et croissantes, donc elles sont affines de pente b et b^{-1} sur $[q^\alpha_{i,j}, q^\alpha_{i,j-1}[$ et $[\mu^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i+1,j}[$. □

En particulier le corollaire montre que l'application

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \longrightarrow & (\mathbb{R}^{S\times I})^2 \\ \varphi & \longmapsto & (q^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i,j}) \end{array}$$

est injective. On va calculer l'image de cette application dans la suite.

3.1.2 Contraintes sur les paramètres

Proposition 3.1.8. *Soient $\varphi \in \Phi$ et $q^\alpha_{i,j}$, $\mu^\alpha_{i,j}$ les paramètres associés. Alors on a pour tout $\alpha \in S$ et pour tous les $(i,j) \in I$ pour lesquels cela a un sens*

$$q^\alpha_{i,j+1} \leqslant q^\alpha_{i,j} \quad \text{et} \quad \mu^\alpha_{i,j} \leqslant \mu^\alpha_{i+1,j} \tag{3.1}$$
$$q^\alpha_{i,j} \leqslant q^\alpha_{i+1,j} \quad \text{et} \quad \mu^\alpha_{i,j+1} \leqslant \mu^\alpha_{i,j} \tag{3.2}$$
$$q^\alpha_{i,j} \leqslant q^\alpha_{i+1,j+1} \quad \text{et} \quad \mu^\alpha_{i+1,j+1} \leqslant \mu^\alpha_{i,j}. \tag{3.3}$$

Démonstration. On n'écrit pas les indices α. Le premier jeu d'inéquations est évoqué dans la remarque 3.1.2.

Montrons le deuxième jeu. Soit $(i,j) \in I$ tel que $(i+1,j) \in I$. Notons $E_{i,j}$, $E_{i+1,j}$ les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ intervenant dans la définition (3.1.1) de $q_{i,j}$ et $q_{i+1,j}$. Montrons que $E_{i+1,j} \subseteq E_{i,j}$: soit $q \in E_{i+1,j}$. On a $\psi_j(\varphi_i(q)) \geqslant \psi_j(\varphi_{i+1}(q)) \geqslant q$. Si $\psi_j(\varphi_i(q)) > q$ c'est terminé. Sinon on note $\mu = \varphi_i(q)$, on a $\mu = \varphi_{i+1}(q)$ et

$$\#\{i' \leqslant i \ ; \ \varphi_{i'}(q) = \mu\} < \#\{i' \leqslant i+1 \ ; \ \varphi_{i'}(q) = \mu\} \leqslant \#\{j' \leqslant j \ ; \ \psi_{j'}(\mu) = q\}$$

donc $q \in E_{i,j}$. On obtient $q_{i,j} \leqslant q_{i+1,j}$.
On montre de même que $\mu_{i,j+1} \leqslant \mu_{i,j}$.

Montrons le troisième jeu. Si $q_{i,j} = q_{i,j+1}$ ou $q_{i+1,j} = q_{i+1,j+1}$, on a bien $q_{i,j} \leqslant q_{i+1,j+1}$ par le deuxième jeu. Dans le cas contraire, les intervalles $[q_{i,j+1}, q_{i,j}[$ et $[q_{i+1,j+1}, q_{i+1,j}[$ sont non-vides. Or ψ_j induit une bijection croissante de $[\mu_{i,j+1}, \mu_{i+1,j+1}[$ sur $[q_{i,j+1}, q_{i,j}[$ et de $[\mu_{i+1,j+1}, \mu_{i+2,j+1}[$ sur $[q_{i+1,j+1}, q_{i+1,j}[$, donc on a

$$q_{i+1,j+1} = \psi_j(\mu_{i+1,j+1}) \geqslant \lim_{\mu \xrightarrow{<} \mu_{i+1,j+1}} \psi_j(\mu) = q_{i,j}.$$

Le raisonnement est le même pour obtenir $\mu_{i+1,j+1} \leqslant \mu_{i,j}$. □

Il y a également des relations entre les $q^\alpha_{i,j}$ et les $\mu^\alpha_{i,j}$:

Proposition 3.1.9. *Soient $\varphi \in \Phi$ et $q^\alpha_{i,j}$, $\mu^\alpha_{i,j}$ les paramètres associés. Alors pour tout $\alpha \in S$, on a pour tout $i \in [\![1, d]\!]$*

$$\mu^\alpha_{i,i} = bq^\alpha_{i,i} - q^{F\circ\alpha}_{i,d} \tag{3.4}$$

et pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant d$

$$\mu^\alpha_{i+1,j} - \mu^\alpha_{i,j} = b(q^\alpha_{i,j-1} - q^\alpha_{i,j}). \tag{3.5}$$

Démonstration. Pour $q \geqslant q^\alpha_{i,i}$ on a $\varphi^\alpha_i(q) = b(q - q^\alpha_{i,i}) + \mu^\alpha_{i,i}$ d'après le corollaire 3.1.7, mais on sait aussi que $\varphi^\alpha_i(q) = bq - q^{F\circ\alpha}_i$ pour q grand. En faisant $q = q^\alpha_{i,i}$ on obtient la première relation.

Pour la deuxième égalité, on utilise le fait que φ^α_i est une bijection affine de pente b de $[q^\alpha_{i,j}, q^\alpha_{i,j-1}[$ sur $[\mu^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i+1,j}[$. □

On peut combiner les relations (3.4) et (3.5) : pour des nombres $(q^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i,j}) \in (\mathbb{R}^{S\times I})^2$ on a (3.4) et (3.5) ssi pour tout $(i,j) \in I$ on a

$$\mu^\alpha_{i,j} = bq^\alpha_{j,j} - q^{F\circ\alpha}_{j,d} + b\sum_{s=i}^{j-1}(q^\alpha_{s,j} - q^\alpha_{s,j-1}). \tag{3.6}$$

Remarque 3.1.10. On peut également exprimer les $q^\alpha_{i,j}$ en fonction des $\mu^\alpha_{i,j}$ en inversant la formule (3.6).

On termine en combinant les relations obtenues :

Proposition 3.1.11. *Si $(q^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i,j}) \in (\mathbb{R}^{S\times I})^2$, on a les relations (3.1)-(3.2)-(3.3)-(3.4)-(3.5) ssi les relations (3.4)-(3.5) et*

$$q^\alpha_{i,j+1} \leqslant q^\alpha_{i,j} \quad et \quad q^\alpha_{i,j} \leqslant q^\alpha_{i+1,j+1} \quad et \quad \mu^\alpha_{i+1,j+1} \leqslant \mu^\alpha_{i,j} \tag{3.7}$$

sont vérifiées.

Démonstration. Il est immédiat que les inégalités (3.1), (3.2) et (3.3) entraînent (3.7). Les relations (3.1) et (3.3) entraînent (3.2). On a également équivalence entre :

(i) (3.5) et pour tout couple (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant j < d$, $q^\alpha_{i,j+1} \leqslant q^\alpha_{i,j}$

(ii) (3.5) et pour tout couple (i, j) tel que $1 \leqslant i < j \leqslant d$, $\mu^\alpha_{i,j} \leqslant \mu^\alpha_{i+1,j}$.

Cela établit le résultat. □

3.1.3 La paramétrisation de l'ensembles des données combinatoires

Notons K le convexe de $(\mathbb{R}^{S\times I})^2$ donné par

$$K = \{(q^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i,j}) \in (\mathbb{R}^{S\times I})^2 \;;\; \text{ on a } (3.4), (3.5) \text{ et } (3.7)\}.$$

On sait que les paramètres associés à une donnée combinatoire $\varphi \in \Phi$ sont dans K.

Proposition 3.1.12. *L'application* $\begin{array}{ccc} \Phi & \longrightarrow & K \\ \varphi & \longmapsto & (q^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i,j}) \end{array}$ *est une bijection.*

Démonstration. L'injectivité est connue, voir le corollaire 3.1.7. Pour la surjectivité, prenons $(q^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i,j}) \in K$ et montrons que les fonctions φ^α_i données par (voir le corollaire 3.1.7)

$$\varphi^\alpha_i(q) = \begin{cases} -\infty & \text{si } q < q^\alpha_{i,d} \\ b(q - q^\alpha_{i,j}) + \mu^\alpha_{i,j} & \text{si } q \in [q^\alpha_{i,j}, q^\alpha_{i,j-1}[\text{ pour un } j \in [\![i, d]\!] \end{cases}$$

forment une donnée combinatoire φ paramétrée par les $q^\alpha_{i,j}$, $\mu^\alpha_{i,j}$.

Vérifions d'abord que $\varphi \in \Phi$. Intéressons-nous d'abord à la condition (1) de la définition (2.1.14) de l'ensemble Φ. Soit $i \in [\![1, d[\![$. On veut vérifier que $\varphi^\alpha_i \geqslant \varphi^\alpha_{i+1}$. Si $q < q^\alpha_{i+1,d}$, on a $\varphi^\alpha_{i+1}(q) = -\infty$. Sinon, il existe $j \in [\![i + 1, d]\!]$ tel que $q \in [q^\alpha_{i+1,j}, q^\alpha_{i+1,j-1}[$, et alors

$$\begin{aligned} \varphi^\alpha_{i+1}(q) &= b(q - q^\alpha_{i+1,j}) + \mu^\alpha_{i+1,j} \\ &\leqslant b(q - q^\alpha_{i,j-1}) + \mu^\alpha_{i,j-1} \quad \text{car } q^\alpha_{i+1,j} \geqslant q^\alpha_{i,j-1} \text{ et } \mu^\alpha_{i+1,j} \leqslant \mu^\alpha_{i,j-1}. \end{aligned}$$

Mais pour $j' \geqslant i$ et $q' \geqslant q_{i,j'}$ on montre (par (3.3) et (3.5)) que

$$\varphi^\alpha_i(q') \geqslant b(q' - q^\alpha_{i,j'}) + \mu^\alpha_{i,j'}.$$

En appliquant ceci à $q' = q$ et $j' = j - 1$ (on a $q \geqslant q^\alpha_{i+1,j} \geqslant q^\alpha_{i,j-1}$) on obtient $\varphi^\alpha_i(q) \geqslant \varphi^\alpha_{i+1}(q)$.

Les points (2) et (3) de la définition de Φ sont vérifiés grâce à (3.1), (3.3), (3.4) et (3.5).

Il reste à vérifier le point (4), en prenant les fonctions ψ_j^α définies par

$$\psi_j^\alpha(\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < \mu_{1,j}^\alpha \\ b^{-1}(\mu - \mu_{i,j}^\alpha) + q_{i,j}^\alpha & \text{si } \mu \in [\mu_{i,j}^\alpha, \mu_{i+1,j}^\alpha[\text{ pour un } i \in [\![1, j]\!]. \end{cases}$$

Les points (i) et (ii) se montrent comme au-dessus. Pour le point (iii), si $q, \mu \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![1, d]\!]$, on a $\varphi_i^\alpha(q) = \mu$ ssi il existe (un unique) $j \geqslant i$ tel que $q_{i,j}^\alpha \leqslant q < q_{i,j-1}^\alpha$ et $b(q - q_{i,j}^\alpha) + \mu_{i,j}^\alpha = \mu$. Donc

$$\#\{i \;;\; \varphi_i^\alpha(q) = \mu\} = \#\left\{(i,j) \in I \;;\; q_{i,j}^\alpha \leqslant q < q_{i,j-1}^\alpha \text{ et } b(q - q_{i,j}^\alpha) + \mu_{i,j}^\alpha = \mu\right\}$$

et de même

$$\#\{j \;;\; \psi_j^\alpha(\mu) = q\} = \#\left\{(i,j) \in I \;;\; \mu_{i,j}^\alpha \leqslant \mu < \mu_{i+1,j}^\alpha \text{ et } b^{-1}(\mu - \mu_{i,j}^\alpha) + q_{i,j}^\alpha = q\right\}$$

or les deux membres de droites sont égaux par (3.5).
On a bien montré $\varphi \in \Phi$.

Montrons enfin que les $q_{i,j}^\alpha(\varphi)$, $\mu_{i,j}^\alpha(\varphi)$ sont les $q_{i,j}^\alpha$, $\mu_{i,j}^\alpha$. Par la relation (3.6), il suffit de montrer que les $q_{i,j}^\alpha(\varphi)$ sont les $q_{i,j}^\alpha$. On le fait par récurrence sur d. Si $d = 1$ c'est immédiat.

Supposons $d \geqslant 2$ et le résultat démontré pour $d - 1$. On pose $q_{i,j}'^\alpha = q_{i+1,j+1}^\alpha$, $\mu_{i,j}'^\alpha = \mu_{i+1,j+1}^\alpha$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d-1$. Il correspond à la famille $(q_{i,j}'^\alpha, \mu_{i,j}'^\alpha) \in K$ une donnée combinatoire $\varphi' = (\varphi_i'^\alpha) \in \Phi$. Il est clair que $\varphi_i'^\alpha = \varphi_{i+1}^\alpha$, donc par le lemme 3.1.4 et l'hypothèse de récurrence, si $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d-1$ on a

$$q_{i+1,j+1}^\alpha(\varphi) = q_{i,j}'^\alpha(\varphi') = q_{i,j}'^\alpha = q_{i+1,j+1}^\alpha.$$

Reste à démontrer que $q_{1,j}^\alpha(\varphi) = q_{1,j}^\alpha$ pour $1 \leqslant j \leqslant d$. On va utiliser les relations

$$q \geqslant q_{1,j}^\alpha \implies \varphi_1^\alpha(q) \geqslant b(q - q_{1,j}^\alpha) + \mu_{1,j}^\alpha \tag{3.8}$$

$$\mu \geqslant \mu_{1,j}^\alpha \implies \psi_j^\alpha(\mu) \geqslant b^{-1}(\mu - \mu_{1,j}^\alpha) + q_{1,j}^\alpha \tag{3.9}$$

$$j < d \text{ et } q < q_{1,j}^\alpha \implies \varphi_1^\alpha(q) \leqslant b(q - q_{1,j}^\alpha) + \mu_{2,j+1}^\alpha. \tag{3.10}$$

Il s'agit de montrer que $\{q \in \mathbb{R} \;;\; \psi_j^\alpha(\varphi_1^\alpha(q)) \geqslant q\} = [q_{1,j}^\alpha, +\infty[$. Or si $q \geqslant q_{1,j}^\alpha$ on a $\mu = \varphi_1^\alpha(q) \geqslant b(q - q_{1,j}^\alpha) + \mu_{1,j}^\alpha \geqslant \mu_{1,j}^\alpha$ par (3.8) donc $\psi_j^\alpha(\mu) \geqslant q$ par (3.9).

Maintenant si $q < q_{1,j}^\alpha$, soit $j = d$ et alors $\varphi_1^\alpha(q) = -\infty$, soit $j < d$ et alors par (3.10) on a $\mu = \varphi_1^\alpha(q) < \mu_{2,j+1}^\alpha \leqslant \mu_{1,j}^\alpha$ donc $\psi_j^\alpha(\mu) = -\infty$. On obtient $\{q \in \mathbb{R} \;;\; \psi_j^\alpha(\varphi_1^\alpha(q)) \geqslant q\} = [q_{1,j}^\alpha, +\infty[$. □

Les données combinatoires provenant d'une collection de réseaux $(L^\alpha)_\alpha$ sont dans le sous-ensemble $\Phi_\mathbb{Z}$ de Φ. On peut caractériser $\Phi_\mathbb{Z}$ via la bijection $\Phi \xrightarrow{\sim} K$.

Proposition 3.1.13. *Soit $\varphi \in \Phi$. On a $\varphi \in \Phi_\mathbb{Z}$ si et seulement si :*

$$\forall \alpha \in S, \forall (i,j) \in I, \left(q_{i,j}^\alpha(\varphi) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \text{ et } q_{i,j}^\alpha(\varphi) \in \mathbb{Z} \text{ si } j = d\right).$$

Démonstration. On néglige les indices α.
Si la condition sur les $q_{i,j}(\varphi)$ est vérifiée, les deux points de la définition 2.1.15 de $\Phi_\mathbb{Z}$ sont vérifiés, puisque $q_{i,d}(\varphi) = q_i$.

Réciproquement, supposons $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$. La première condition assure que les $q_{i,d}(\varphi)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

Soit $v \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ et $(i,j) \in I$. Alors soit $(\psi_j^\alpha \circ \varphi_i^\alpha)|_{[v,v+1[} \equiv -\infty$, soit $(\psi_j^\alpha \circ \varphi_i^\alpha - Id)|_{[v,v+1[}$ est constante (finie).
En effet si $\varphi_i^\alpha(v) = -\infty$, la continuité de φ_i^α sur $[v, v+\frac{1}{b}[$ assure que l'on est dans le premier cas. Sinon $\lambda = \varphi_i^\alpha(v) > -\infty$, on a $\varphi_i^\alpha([v, v+\frac{1}{b}[) \subseteq [\lambda, \lambda+1[$. Mais ψ_j^α est continue sur $[\lambda, \lambda+1[$ (corollaire 2.1.22). Donc soit $\psi_j^\alpha(\lambda) = -\infty$, soit pour $q \in [v, v+\frac{1}{b}[$ on a $\psi_j^\alpha(\varphi_i^\alpha(q)) = \psi_j^\alpha(b(q-v) + \varphi_i^\alpha(v)) = q - v + \psi_j^\alpha(\varphi_i^\alpha(v))$.

Notons à nouveau $E_{i,j}$ l'ensemble des réels q tels que soit $\psi_j^\alpha(\varphi_i^\alpha(q)) > q$, soit $\psi_j^\alpha(\varphi_i^\alpha(q)) = q$ et $\#\{i' \leqslant i \ ; \ \varphi_{i'}^\alpha(q) = \mu\} \leqslant \#\{j' \leqslant j \ ; \ \psi_{j'}^\alpha(\mu) = q\}$ pour $\mu = \varphi_i^\alpha(q)$. Alors la continuité des φ_i^α (respectivement des ψ_j^α) sur les intervalles de la forme $[v, v+\frac{1}{b}[$, avec $v \in \frac{1}{b}$ (resp. de la forme $[\lambda, \lambda+1[$ avec $\lambda \in \mathbb{Z}$) et ce qui précède montre que $E_{i,j} \cap [v, v+1[= [v, v+1[$ ou $\emptyset$ pour $v \in \frac{1}{b}$. Mais par définition on a $q_{i,j}^\alpha(\varphi) = infE_{i,j}$, donc $q_{i,j}^\alpha(\varphi) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$. □

Un cône convexe

On a vu dans la proposition 3.1.9 et la remarque 3.1.10 que les $q_{i,j}^\alpha$ se déduisent des $\mu_{i,j}^\alpha$ et réciproquement. Dans la suite au lieu de travailler avec le convexe K nous allons utiliser avec le cône convexe Q de $\mathbb{R}^{S \times I}$ défini par les relations

(I) $q_{i,j+1}^\alpha \leqslant q_{i,j}^\alpha$

(II) $q_{i,j}^\alpha \leqslant q_{i+1,j+1}^\alpha$

(III) $bq_{j+1,j+1}^\alpha - q_{j+1,d}^{F\circ\alpha} + b\sum_{s=i+1}^{j}(q_{s,j+1}^\alpha - q_{s,j}^\alpha) \leqslant bq_{j,j}^\alpha - q_{j,d}^{F\circ\alpha} + b\sum_{s=i}^{j-1}(q_{s,j}^\alpha - q_{s,j-1}^\alpha)$.

La relation (III) n'est rien d'autre que la relation $\mu_{i+1,j+1}^\alpha \leqslant \mu_{i,j}^\alpha$ traduite en terme de $q_{i,j}^\alpha$.

On a immédiatement :

Proposition 3.1.14. *L'application* $\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & Q \\ (q_{i,j}^\alpha, \mu_{i,j}^\alpha) & \longmapsto & (q_{i,j}^\alpha) \end{array}$ *est une bijection dont la réciproque est donnée par la relation (3.6).*

3.2 La dimension des strates est une fonction linéaire

Dans la section précédente on a exprimé l'ensemble des données combinatoires Φ comme un cône convexe, *via* la paramétrisation des $\varphi \in \Phi$ par les $q_{i,j}^\alpha$ et les $\mu_{i,j}^\alpha$. Or on s'intéresse à la dimension $\dim(\mathcal{X}_\varphi)$ des strates pour $\varphi \in \Phi$, qui est reliée à la dimension $\dim(\varphi)$ de φ. Montrons maintenant que la fonction dimension est linéaire sur Φ.

On rappelle (voir les définitions 2.2.14 et 2.2.1) que la dimension d'un élément $\varphi = (\varphi^\alpha) \in \Phi$ est $\sum_{\alpha\in S}\dim(\varphi^\alpha) = \sum_{\alpha \in S} A^\alpha$, où

$$A^\alpha = \left\{(q,i,q',i') \ ; \ (q',i') > (q,i) \text{ et } \varphi_i^\alpha\left(q - \frac{1}{b}\right) < \varphi_{i'}^\alpha\left(q'\right) < \varphi_i^\alpha\left(q\right)\right\}.$$

Lemme 3.2.1. *Si* $(\varphi^\alpha) \in \Phi$ *et* $\alpha \in S$*, on a*

$$\dim(\varphi^\alpha) = \sum_{1 \leqslant i < i' \leqslant d} Leb(\varphi_{i'}^\alpha(\mathbb{R}) \backslash \varphi_i^\alpha(\mathbb{R}))$$

où Leb est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On fixe $\alpha \in S$, et pour simplifier les notations on note $\varphi_i^\alpha = \varphi_i$, $A^\alpha = A$, etc. Soient i et i' deux entiers avec $i < i'$. On sait (corollaire 2.1.20) que $\varphi_i^{-1}(\mathbb{Z}) = \varphi_{i'}^{-1}(\mathbb{Z}) = \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ donc

$$\varphi_{i'}(\mathbb{R})\backslash\varphi_i(\mathbb{R}) = \coprod_{\mu\in\mathbb{Z}\ ,\ \mu\in\varphi_{i'}(\mathbb{R})\backslash\varphi_i(\mathbb{R})} [\mu, \mu+1[.$$

Ainsi $\mathrm{Leb}(\varphi_{i'}(\mathbb{R})\backslash\varphi_i(\mathbb{R})) = \#\{\mu \in \mathbb{Z}; \mu \in \varphi_{i'}(\mathbb{R})\backslash\varphi_i(\mathbb{R})\}$.
Or si $\mu \in \mathbb{Z} \cap (\varphi_{i'}(\mathbb{R})\backslash\varphi_i(\mathbb{R}))$, il existe un unique $q' \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ tel que $\mu = \varphi_{i'}(q')$, et en posant $q = min\{q'' \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}\ ; \varphi_i(q'') > \varphi_{i'}(q')\}$, on a $(q, i, q', i') \in A$.
On en déduit $\mathrm{Leb}(\varphi_{i'}(\mathbb{R})\backslash\varphi_i(\mathbb{R})) = \#\{(v, j, v', j') \in A\ ; (j, j') = (i, i')\}$. Mais si $(q, i, q', i') \in A$, on a $i < i'$ puisque $\varphi_1 \geqslant \cdots \geqslant \varphi_d$, d'où le lemme. □

Proposition 3.2.2. *Pour* $\varphi = (\varphi^\alpha) \in \Phi$, *on a pour tout* $\alpha \in S$,

$$\begin{aligned}\dim(\varphi^\alpha) &= \sum_{j=1}^{d}(d+1-j).\mu_{1,j}^\alpha - \sum_{(i,j)\in I}\mu_{i,j}^\alpha \\ &= b\sum_{(i,j)\in I} q_{i,j}^\alpha - b\sum_{i=1}^{d} i.q_{i,d}^\alpha + \sum_{i=1}^{d}(2i-d-1).q_{i,d}^{F\circ\alpha}.\end{aligned}$$

Démonstration. Montrons par récurrence sur d que $\dim(\varphi^\alpha) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j<d}(d-j)(\mu_{i,j}^\alpha - \mu_{i+1,j+1}^\alpha)$. Les relations de l'énoncé découlent de cette égalité et de l'expression des $q_{i,j}^\alpha$ en fonction des $\mu_{i,j}^\alpha$.
L'initialisation est évidente, faisons le pas de récurrence en prenant $d \geqslant 2$. Par les lemmes 3.1.4 et 3.2.1 il suffit de montrer que

$$\sum_{1<i'\leqslant d} Leb(\varphi_{i'}^\alpha(\mathbb{R})\backslash\varphi_1^\alpha(\mathbb{R})) = \sum_{1\leqslant j<d}(d-j)(\mu_{1,j}^\alpha - \mu_{2,j+1}^\alpha).$$

Pour une interprétation géométrique de cette égalité, voir les figures 3.1 et 3.2.

On sait que $\varphi_1^\alpha(\mathbb{R}) = \coprod_{1\leqslant j\leqslant d}[\mu_{1,j}^\alpha, \mu_{2,j}^\alpha[$ et dans cette réunion disjointe les intervalles sont triés par « ordre décroissant » : on a $\mu_{2,j+1}^\alpha \leqslant \mu_{1,j}^\alpha$, avec la convention $\mu_{2,d+1}^\alpha = -\infty$. Donc $\mathbb{R}\backslash\varphi_1^\alpha(\mathbb{R}) = \coprod_{1\leqslant j\leqslant d}[\mu_{2,j+1}^\alpha, \mu_{1,j}^\alpha[$. On obtient

$$\begin{aligned}\sum_{1<i'\leqslant d} Leb(\varphi_{i'}^\alpha(\mathbb{R})\backslash\varphi_1^\alpha(\mathbb{R})) &= \sum_{1\leqslant j\leqslant d}\sum_{i'>1} Leb(\varphi_{i'}^\alpha(\mathbb{R})\cap[\mu_{2,j+1}^\alpha, \mu_{1,j}^\alpha[) \\ &= \sum_{1\leqslant j\leqslant d}\int_{[\mu_{2,j+1}^\alpha, \mu_{1,j}^\alpha[} \#\{i'>1\ ;\ \mu\in\varphi_{i'}^\alpha(\mathbb{R})\}\ d\mu\end{aligned}$$

la deuxième égalité venant du théorème de Fubini-Tonelli.

Fixons $j \in [\![1,d]\!]$. Si $\mu \in [\mu^\alpha_{2,j+1}, \mu^\alpha_{1,j}[$ on a

$$\begin{aligned}
\#\{i' > 1 \; ; \; \mu \in \varphi^\alpha_{i'}(\mathbb{R})\} &= \# \left(\coprod_{q \in \mathbb{R}} \{i' \in [\![1,d]\!] \; ; \; \varphi^\alpha_{i'}(q) = \mu\} \right) \\
&= \sum_{q \in \mathbb{R}} \#\{i' \in [\![1,d]\!] \; ; \; \varphi^\alpha_{i'}(q) = \mu\} \\
&= \sum_{q \in \mathbb{R}} \#\{j' \in [\![1,d]\!] \; ; \; \psi^\alpha_{j'}(\mu) = q\} \\
&= \#\{j' \in [\![1,d]\!] \; ; \; \psi^\alpha_{j'}(\mu) > -\infty\} \\
&= \#\{j' \in [\![1,d]\!] \; ; \; \mu \geqslant \mu^\alpha_{1,j'}\}.
\end{aligned}$$

Mais on sait que $j+1$ appartient à ce dernier ensemble car $\mu^\alpha_{1,j+1} \leqslant \mu^\alpha_{2,j+1}$, tandis que j n'y appartient pas puisque $\mu < \mu^\alpha_{1,j}$ par hypothèse. Donc $\{j' \in [\![1,d]\!] \; ; \; \mu \geqslant \mu^\alpha_{1,j'}\} = [\![j+1,d]\!]$ et cet ensemble est de cardinal $d-j$. Ainsi

$$\sum_{1 < i' \leqslant d} Leb(\varphi^\alpha_{i'}(\mathbb{R}) \backslash \varphi^\alpha_1(\mathbb{R})) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant d} (d-j) \cdot Leb([\mu^\alpha_{2,j+1}, \mu^\alpha_{1,j}[)$$

et le pas de récurrence est établi. □

3.3 Formulation du problème d'optimisation linéaire

3.3.1 La dimension des variétés de Kisin

Pour estimer la dimension des variétés de Kisin $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$, on a commencé par définir une stratification de celles-ci par les variétés $\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}$, où $\tilde{\varphi}$ est une donnée combinatoire « entière », *i.e.* un élément de $\tilde{\Phi}_\mathbb{Z}$.

Les variétés $\mathcal{X}_\mu$

On a vu dans la remarque 2.1.30 que

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{X}_\mu) &= \sup_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}_\mathbb{Z}, \; \mu(\tilde{\varphi}) = \mu} \dim(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde{\varphi}}) \\
&= \sup_{\varphi \in \Phi_\mathbb{Z}, \; \mu(\varphi) = \mu} \dim(\mathcal{X}_\varphi).
\end{aligned}$$

Or on a mis l'ensemble Φ en bijection avec le cône convexe Q *via* la paramétrisation par les $q^\alpha_{i,j}, \mu^\alpha_{i,j}$ (voir la proposition 3.1.14). Le sous-ensemble $\Phi_\mathbb{Z}$ est lui mis en bijection (proposition 3.1.13) avec $Q \cap R$ où R est le réseau

$$R = \{(q^\alpha_{i,j}) \in \mathbb{R}^{S \times I} \; ; \; \forall \alpha \in S, \forall (i,j) \in I, (q^\alpha_{i,j} \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \text{ et } (q^\alpha_{i,j} \in \mathbb{Z} \text{ si } j = d))\}.$$

La condition $\mu(\varphi) = \mu$ est elle aussi linéaire en les $q^\alpha_{i,j}$: on a $\mu^\alpha_j(\varphi) = \mu^\alpha_{1,j}(\varphi) = bq^\alpha_{j,j}(\varphi) - q^{F \circ \alpha}_{j,d}(\varphi) + b \sum_{1 \leqslant s < j} (q^\alpha_{s,j}(\varphi) - q^\alpha_{s,j-1}(\varphi))$ par le corollaire 3.1.6 et la relation (3.6).
Enfin pour $\varphi \in \Phi_\mathbb{Z}$, la dimension de $\mathcal{X}_\varphi$ est, à une constante près, linéaire en les $q^\alpha_{i,j}(\varphi)$ (théorème 2.2.21 et proposition 3.2.2).

Définition 3.3.1. *On note g l'application linéaire*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{S \times I} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{S \times [\![1,d]\!]} \\
(q^\alpha_{i,j}) & \longmapsto & (\mu^\alpha_{1,j}) = (bq^\alpha_{j,j} - q^{F \circ \alpha}_{j,d} + b \sum_{1 \leqslant s < j} (q^\alpha_{s,j} - q^\alpha_{s,j-1}))
\end{array}$$

(la formule vient de la relation (3.6)). On note l la forme linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{S\times I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (q^\alpha_{i,j}) & \longmapsto & b\sum_{(i,j)\in I} q^\alpha_{i,j} - b\sum_{i=1}^d i.q^\alpha_{i,d} + \sum_{i=1}^d (2i-d-1).q^{F\circ\alpha}_{i,d} \end{array}$$

(la formule vient de la proposition 3.2.2).

On a montré :

Théorème 3.3.2. *Soit $\mu = (\mu^\alpha_j) \in \mathbb{Z}^{S\times[\![1,d]\!]}$ dominant. Alors*

$$\left(\sup_{x\in Q\cap R,\ g(x)=\mu} l(x)\right) - \#S\cdot\frac{d(d-1)}{2} \leqslant \dim(\mathcal{X}_\mu) \leqslant \left(\sup_{x\in Q\cap R,\ g(x)=\mu} l(x)\right) + \#S\cdot\frac{d(d-1)}{2}.$$

Les variétés $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$

Concernant les variétés $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$ on a

$$\begin{array}{rcl} \dim(\mathcal{X}_{\leqslant\mu}) & = & \sup\limits_{\tilde\varphi\in\tilde\Phi_{\mathbb{Z}},\ \mu(\tilde\varphi)\leqslant\mu} \dim(\tilde{\mathcal{X}}_{\tilde\varphi}) \\ & = & \sup\limits_{\varphi\in\Phi_{\mathbb{Z}},\ \mu(\varphi)\leqslant\mu} \dim(\mathcal{X}_\varphi). \end{array}$$

Rappelons que si $\mu = (\mu^\alpha_j), \mu' = (\mu'^\alpha_j) \in \mathbb{Z}^{S\times[\![1,d]\!]}$ sont dominants, on a

$$\begin{array}{lll} \mu' \leqslant \mu & \text{ssi} & \forall\alpha\in S, \forall s\in[\![1,d]\!], \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant s} \mu'^\alpha_j \leqslant \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant s} \mu^\alpha_j \text{ avec égalité si } s=d \\ & \text{ssi} & \mu-\mu' \in C^\star \end{array}$$

avec $C^\star = \left\{(z^\alpha_j) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}\ ;\ \forall\alpha\in S, \forall s\in[\![1,d]\!], \sum_{1\leqslant j\leqslant s} z^\alpha_j \geqslant 0 \text{ avec égalité si } s=d\right\}$. L'ensemble $C^\star$ est un cône convexe de $\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$: il est non-vide, stable par addition et par multiplication par un réel positif ou nul.

Ainsi :

Théorème 3.3.3. *Soit $\mu = (\mu^\alpha_j) \in \mathbb{Z}^{S\times[\![1,d]\!]}$ dominant. Alors*

$$\left(\sup_{x\in Q\cap R,\ g(x)\in\mu-C^\star} l(x)\right) - \#S\cdot\frac{d(d-1)}{2} \leqslant \dim(\mathcal{X}_{\leqslant\mu}) \leqslant \left(\sup_{x\in Q\cap R,\ g(x)\in\mu-C^\star} l(x)\right) + \#S\cdot\frac{d(d-1)}{2}.$$

Il faut maintenant calculer les bornes supérieures des théorèmes 3.3.2 et 3.3.3. Dans la sous-section suivante on donne des résultats d'optimisation linéaire utiles pour ce calcul.

3.3.2 Quelques résultats d'optimisation linéaire

On se place dans le cadre suivant : on se donne un espace euclidien $\mathcal{E}$, P un cône convexe de $\mathcal{E}$, $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^J$ (avec J un ensemble fini) une application linéaire représentée (pour le produit scalaire fixé) par les vecteurs $(\vec{f_j})_{j\in J}$ de $\mathcal{E}$, ainsi qu'une forme linéaire ℓ sur $\mathcal{E}$, représentée par un vecteur $\vec{\ell}$. Dans la suite on note indistinctement $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire de $\mathcal{E}$ et le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^J$.
Dans ce contexte, le dual du cône convexe P, noté $P^\star$, est l'ensemble

$$\{x\in\mathcal{E}\ ;\ \forall x'\in P, \langle x|x'\rangle \geqslant 0\}.$$

C'est encore un cône convexe de $\mathcal{E}$. De plus le théorème de Hahn-Banach entraîne $(P^\star)^\star = P$.

Définition 3.3.4. *On note $a_{P,f,\ell}$ la fonction définie par*

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^J & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ y & \longmapsto & \sup_{x\in P,\ f(x)=y} \ell(x). \end{array}$$

On définit également le convexe $A_{P,f,\ell} = \{(z_j)_j \in \mathbb{R}^J \ ;\ \sum_{j\in J} z_j.\vec{f}_j - \vec{\ell} \in P^\star\}$.

Le résultat suivant établit un lien entre maximisation sur P et minimisation sur $A_{P,f,\ell}$.

Proposition 3.3.5. *On suppose que le convexe $A_{P,f,\ell}$ n'est pas vide. Alors pour $y \in \mathbb{R}^J$ on a $a_{P,f,\ell}(y) = \inf_{z\in A_{P,f,\ell}} \langle z|y\rangle$.*

Démonstration. Si $h : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}, (y_j) \mapsto \sum_{j\in J} z_j.y_j + \beta$ est une fonction affine, h majore $a_{P,f,\ell}$ ssi $\forall x \in P, \left\langle x \middle| \vec{l} - \sum_j z_j \vec{f}_j \right\rangle \leqslant \beta$ ssi $\beta \geqslant 0$ et $\sum_j z_j \vec{f}_j - \vec{l} \in P^\star$. La deuxième équivalence provient du fait que Q est un cône convexe.
On a supposé $A_{P,f,\ell} \neq \emptyset$, donc il existe une fonction affine majorant $a_{P,f,\ell}$. Ainsi $a_{P,f,\ell}$ n'est jamais égale à $+\infty$. Or cette fonction est concave, donc par le théorème de Hahn-Banach elle s'écrit comme la borne inférieure des fonctions affines qui la majorent. Cela démontre la proposition. □

Au vu de la borne supérieure intervenant dans le théorème 3.3.3, on a besoin de considérer des fonctions un peu plus générales que celle du type $a_{P,f,\ell}$. Soient donc U et V deux cônes convexes de $\mathbb{R}^J$.

Définition 3.3.6. *On note $b_{P,f,\ell,U,V}$ la fonction définie par*

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^J & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ y & \longmapsto & \begin{cases} \sup_{x\in P,\ f(x)=y-U} \ell(x) & \text{si } y \in V \\ -\infty & \text{si } y \notin V \end{cases} \end{array}$$

On définit également le convexe $B_{P,f,\ell,U,V} = (A_{P,f,\ell} \cap U^\star) + V^\star$.

Lorsque $V = \mathbb{R}^J$, on l'omet dans les indices : on notera $b_{P,f,\ell,U}$ et $B_{P,f,\ell,U}$ pour $b_{P,f,\ell,U,\mathbb{R}^J}$ et $B_{P,f,\ell,U,\mathbb{R}^J}$. On a à nouveau un résultat de dualité.

Proposition 3.3.7. *On suppose que le convexe $B_{P,f,\ell,U,V}$ est non-vide. Alors pour $y \in \mathbb{R}^J$ on a $b_{P,f,\ell,U,V}(y) = \inf_{z\in B_{P,f,\ell,U,V}} \langle z|y\rangle$.*

Démonstration. Supposons d'abord que $V = \mathbb{R}^J$. Dans ce cas on a $V^\star = \{0\}$ et $B_{P,f,\ell,U} = A_{P,f,\ell} + U^\star$.

Si $h : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}, (y_j) \mapsto \sum_{j\in J} z_j.y_j + \beta$ est une fonction affine, h majore $b_{P,f,\ell,U}$ ssi

$$\forall x \in P, \forall u \in U, \left\langle x|\vec{l} - \sum_j z_j \vec{f}_j \right\rangle \leqslant \beta + \langle z|u\rangle \tag{3.11}$$

avec $z = (z_j)$.

Si $z \notin U^\star$, il existe $u \in U$ vérifiant $\langle z|u\rangle < 0$, donc $\inf_{u'\in U} \langle z|u'\rangle = -\infty$ et (3.11) ne peut être vérifiée. À l'inverse si $z \in U^\star$ on a $\min_{u\in U} \langle z|u\rangle = 0$. Ainsi on a (3.11) ssi

$$z \in U^\star \quad \text{et} \quad \forall x \in P,\ \left\langle x|\vec{l} - \sum_j z_j \vec{f}_j \right\rangle \leqslant \beta$$

ssi $\beta \geqslant 0$ et $z \in A_{P,f,\ell} \cap U^\star$. On termine le cas $V = \mathbb{R}^J$ comme dans la preuve de la proposition 3.3.5.

On prend maintenant V quelconque. Vu ce qui précède, il suffit de montrer que

$$\inf_{z \in B_{P,f,\ell,U,V}} \langle z|y\rangle = \begin{cases} \inf_{z \in A_{P,f,\ell} \cap U^\star} \langle z|y\rangle & \text{si } y \in V \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons d'abord $y \in V$. On a $A_{P,f,\ell} \cap U^\star \subseteq B_{P,f,\ell,U,V}$ donc

$$\inf_{z \in B_{P,f,\ell,U,V}} \langle z|y\rangle \leqslant \inf_{z \in A_{P,f,\ell} \cap U^\star} \langle z|y\rangle .$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, si $z \in B_{P,f,\ell,U,V}$ on écrit $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in A_{P,f,\ell} \cap U^\star$ et $z_2 \in V^\star$, ce qui donne $\langle z|y\rangle = \langle z_1|y\rangle + \langle z_2|y\rangle \geqslant \langle z_1|y\rangle \geqslant \inf_{z' \in A_{P,f,\ell} \cap U^\star} \langle z'|y\rangle$.

Enfin si $y \notin V$, par le théorème d'Hahn-Banach il existe $z_2 \in V^\star$ tel que $\langle z_2|y\rangle < 0$. Prenons $z_1 \in A_{P,f,\ell} \cap U^\star$, qui est non vide. Alors pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a $z_1 + \lambda z_2 \in B_{P,f,\ell,U,V}$ et $\langle z_1 + \lambda z_2|y\rangle = \langle z_1|y\rangle + \lambda \langle z_2|y\rangle$, donc $\inf_{z \in B_{P,f,\ell,U,V}} \langle z|y\rangle = -\infty$. □

Il manque un dernier « ingrédient » pour pouvoir traiter les bornes supérieures des théorèmes 3.3.2 et 3.3.3 : ces bornes supérieures sont calculées sur l'intersection d'un convexe et d'un réseau de l'espace ambient. On se donne donc maintenant un réseau Γ de notre espace euclidien $\mathcal{E}$.

Définition 3.3.8. *On note $b'_{P,f,\ell,U,V,\Gamma}$ la fonction définie par*

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^J & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ y & \longmapsto & \begin{cases} \sup_{x \in P \cap \Gamma,\ f(x) = y - U} \ell(x) & \textit{si } y \in V \\ -\infty & \textit{si } y \notin V. \end{cases} \end{array}$$

À nouveau lorsque $V = \mathbb{R}^J$ on l'omet dans les indices.

La proposition suivante compare les fonctions $b_{P,f,\ell,U}$ et $b'_{P,f,\ell,U,\Gamma}$.

Proposition 3.3.9. *On suppose que P engendre $\mathcal{E}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\Gamma \cap f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(U)$ engendrent le même $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dans $\mathcal{E}$.*
Alors il existe un vecteur $y_0 \in Im(f)$ et une constante $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in (f(\Gamma) + U) \cap Im(f), \quad b_{P,f,\ell,U}(y - y_0) - c \leqslant b'_{P,f,\ell,U,\Gamma}(y) \leqslant b_{P,f,\ell,U}(y)$$

avec les conventions $\pm\infty - c = \pm\infty$.

Démonstration. La majoration de $b'_{P,f,\ell,U,\Gamma}(y)$ par $b_{P,f,\ell,U}(y)$ est évidente. Établissons la minoration. On suppose d'abord que f est surjective. Notons U' le cône convexe $f^{-1}(U)$. Pour X un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ ou $\mathbb{R}^J$ on note $X_{\mathbb{R}}$ le sous-espace vectoriel engendré.

Considérons le sous-groupe additif $\Gamma \cap U'_{\mathbb{R}}$ de $U'_{\mathbb{R}}$. C'est un réseau de $U'_{\mathbb{R}}$: c'est un $\mathbb{Z}$-module libre puisque c'est un sous-module libre du $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini Γ, et on a de plus $U'_{\mathbb{R}} \subseteq (\Gamma \cap U')_{\mathbb{R}} \subseteq (\Gamma \cap U'_{\mathbb{R}})_{\mathbb{R}}$. Prenons une maille T de $\Gamma \cap U'_{\mathbb{R}}$, *i.e.* une partie compacte de $U'_{\mathbb{R}}$ vérifiant que pour tout $x \in U'_{\mathbb{R}}$, il existe $t \in T$ tel que $x + t \in \Gamma \cap U'_{\mathbb{R}}$.
Il existe un translaté K de T inclus dans $-U'$. En effet, si $U' = \{0\}$ alors $T = \{0\}$ et c'est évident. Sinon, on a $U' \neq \{0\}$ donc U' est d'intérieur non-vide dans $U'_{\mathbb{R}}$. Or U' est stable par multiplication par les scalaires positifs. Dans ce cas $-U'$ contient des boules ouvertes

(intersectées avec $U'_{\mathbb{R}}$) de rayon arbitrairement grand, ce qui assure l'existence de K.
Par le même raisonnement, il existe un translaté $x_0 + K$ de K inclus dans P, avec $x_0 \in \mathcal{E}$. On pose $y_0 = f(x_0)$.

Soit $y \in f(\Gamma) + U$. On va montrer que

$$b'_{P,f,\ell,U,\Gamma}(y) \geqslant b_{P,f,\ell,U}(y - y_0) + \ell(x_0) + \inf_{x' \in K} \ell(x').$$

Si $y - y_0 \notin f(P) + U$, on a $b_{P,f,\ell,U}(y - y_0) = -\infty$ et c'est terminé. Supposons donc $y - y_0 \in f(P) + U$. Alors $b_{P,f,\ell,U}(y - y_0) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Traitons le cas $b_{P,f,\ell,U}(y - y_0)$ fini, le cas $b_{P,f,\ell,U}(y - y_0) = +\infty$ étant analogue.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $x_1 \in P$ tel que $f(x_1) \in y - y_0 - U$ et $\ell(x_1) \geqslant b_{P,f,\ell,U}(y - y_0) - \varepsilon$. Alors $f(x_0 + x_1) \in y - U \subseteq f(\Gamma) + U_{\mathbb{R}}$. Ainsi il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $x_0 + x_1 - \gamma \in f^{-1}(U_{\mathbb{R}})$. Mais par surjectivité de f on a $f^{-1}(U_{\mathbb{R}}) = U'_{\mathbb{R}}$. D'où $x_0 + x_1 \in \Gamma + U'_{\mathbb{R}}$. Ainsi il existe $x_2 \in K$ tel que l'élément $x = x_0 + x_1 + x_2$ soit dans Γ (car K est un translaté de la maille T). On a $x \in P$ puisque $x_0 + K \subseteq P$. Mais on a également $f(x) = y_0 + f(x_1) + f(x_2) \in y_0 + y - y_0 - U$ car $f(K) \subseteq -U$. Cela donne

$$b'_{P,f,\ell,U,\Gamma}(y) \geqslant \ell(x) \geqslant b_{P,f,\ell,U}(y - y_0) - \left(\varepsilon - \ell(x_0) - \inf_{x' \in K} \ell(x')\right)$$

et K est compact, donc le nombre $\inf_{x' \in K} \ell(x')$ est fini.

Il reste à traiter le cas f non surjective. On remplace f par sa co-restriction $\bar{f} = f|^{\mathrm{Im}(f)}$, U par $\bar{U} = U \cap \mathrm{Im}(f)$. Pour $y \in \mathrm{Im}(f)$ on a alors $b'_{P,\bar{f},l,\bar{U},\Gamma}(y) = b'_{P,f,l,U,\Gamma}(y)$ et $b_{P,\bar{f},l,\bar{U}}(y - y_0) = b_{P,f,l,U}(y - y_0)$ (on utilise $y_0 \in \mathrm{Im}(f)$). On applique alors le raisonnement précédent. On a $\bar{f}^{-1}(\bar{U}) = f^{-1}(U)$ donc x_0, y_0 et la constante c pour $(\bar{f}, \bar{U})$ sont ceux définis au début de la preuve. $\square$

Reformulation des théorèmes d'encadrement

À l'aide des définitions introduites ci-dessus, on peut reformuler les théorèmes 3.3.2 et 3.3.3.

Théorème 3.3.10. *Soit $\mu = (\mu_j^\alpha) \in \mathbb{Z}^{S \times [\![1,d]\!]}$ dominant. Alors*

$$b'_{Q,g,l,0,R}(\mu) - \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2} \leqslant \dim(\mathcal{X}_\mu) \leqslant b'_{Q,g,l,0,R}(\mu) + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}$$

et

$$b'_{Q,g,l,C^\star,R}(\mu) - \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2} \leqslant \dim(\mathcal{X}_{\leqslant\mu}) \leqslant b'_{Q,g,l,C^\star,R}(\mu) + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}.$$

Le chapitre suivant est consacré à l'estimation des nombres $b'_{Q,g,l,0,R}(\mu)$ et $b'_{Q,g,l,C^\star,R}(\mu)$.

Chapitre 4

Dimensions des variétés de Kisin

Le chapitre 3 a permis de relier l'encadrement de la dimension des variétés de Kisin à des problèmes d'optimisation linéaire (théorème 3.3.10). On se consacre dans ce chapitre à ces problèmes d'optimisation. On reprend les notations du chapitre 3.

Pour estimer les bornes $b'_{Q,g,l,0,R}(\mu)$ et $b'_{Q,g,l,C^\star,R}(\mu)$ du théorème 3.3.10, on se ramènera dans la suite, par la proposition 3.3.9, à estimer les bornes $b_{Q,g,l,C}(\mu)$ et $b_{Q,g,l,C^\star}(\mu)$, ce qui nous amène à nous intéresser aux convexes $A_{Q,g,l}$, $A_{Q,g,l} \cap C$, $A_{Q,g,l} \cap C^\star$, etc. On commence par approximer le convexe Q par des cônes Q_{min} et Q_{max} plus simples. On calcule ensuite les points maximaux de Q_{max}, qui vont intervenir dans l'estimation de $b'_{Q,g,l,0,R}(\mu)$ et $b'_{Q,g,l,C^\star,R}(\mu)$. On peut alors relier $A_{Q,g,l}$ à $A_{Q_{max},g,l}$ et on termine en donnant les encadrements pour $\dim(\mathcal{X}_\mu)$ et $\dim(\mathcal{X}_{\leqslant\mu})$.

4.1 Approximations du cône des données combinatoires

Rappelons que le cône convexe $Q \subseteq \mathbb{R}^{S\times I}$, en bijection avec l'ensemble des données combinatoires (voir la proposition 3.1.14), est défini par les relations

(I) $q^\alpha_{i,j+1} \leqslant q^\alpha_{i,j}$

(II) $q^\alpha_{i,j} \leqslant q^\alpha_{i+1,j+1}$

(III) $bq^\alpha_{j+1,j+1} - q^{F\circ\alpha}_{j+1,d} + b\sum_{s=i+1}^{j}(q^\alpha_{s,j+1} - q^\alpha_{s,j}) \leqslant bq^\alpha_{j,j} - q^{F\circ\alpha}_{j,d} + b\sum_{s=i}^{j-1}(q^\alpha_{s,j} - q^\alpha_{s,j-1})$

la relation (III) étant la relation $\mu^\alpha_{i+1,j+1} \leqslant \mu^\alpha_{i,j}$ traduite en terme de $q^\alpha_{i,j}$.

Les fonctions linéaires $g : \mathbb{R}^{S\times I} \to \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$ et $l : \mathbb{R}^{S\times I} \to \mathbb{R}$ sont quant à elles définies en 3.3.1. On note encore $\langle\cdot|\cdot\rangle$ les produits scalaires standards sur $\mathbb{R}^{S\times I}$ et $\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$. Notons $\vec{\mu}^\alpha_j, \vec{l} \in \mathbb{R}^{S\times I}$ les vecteurs représentant g et l respectivement.

Les résultats de dualité donnés dans la sous-section 3.3.2 nous conduisent à étudier le convexe $A_{Q,g,l} = \{(y^\alpha_j) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]} \; ; \; \sum_{\alpha\in S}\sum_{j\in[\![1,d]\!]} y^\alpha_j.\vec{\mu}^\alpha_j - \vec{l} \in Q^\star\}$. La définition de $A_{Q,g,l}$ est pratique lorsque le dual du convexe de départ, c'est à dire $Q^\star$ dans notre cas, est présenté comme l'intersection de demi-espaces affines. Or on dispose d'une présentation de Q comme intersection de demi-espaces affines, ce qui nous donne immédiatement une famille de vecteurs engendrant (en tant que cône convexe) $Q^\star$. Les inégalités compliquées du jeu (III) de la définition de Q sont gênantes pour calculer la présentation souhaitée de $Q^\star$. L'idée est donc d'approximer Q en modifiant les jeux d'inégalités le définissant.

Définition 4.1.1. *On note Q_{max} le cône convexe défini par les relations*

(I) $q^\alpha_{i,j+1} \leqslant q^\alpha_{i,j}$

(II) $q^\alpha_{i,j} \leqslant q^\alpha_{i+1,j+1}$

et Q_{min} le cône convexe défini par

(I) $q^\alpha_{i,j+1} \leqslant q^\alpha_{i,j}$

(II') $q^\alpha_{i,j} = q^\alpha_{i+1,j+1}$.

On a $Q_{min} \subseteq Q \subseteq Q_{max}$. En effet la deuxième inclusion est immédiate, et pour la première si $(q^\alpha_{i,j}) \in \mathbb{R}^{S\times I}$ on a, si (II') est vérifiée, pour tout $\alpha \in S$ et $1 \leqslant i \leqslant j < d$,

$$\begin{aligned} & bq^\alpha_{j+1,j+1} - q^{F\circ\alpha}_{j+1,d} + b\sum_{s=i+1}^{j}(q^\alpha_{s,j+1} - q^\alpha_{s,j}) \leqslant bq^\alpha_{j,j} - q^{F\circ\alpha}_{j,d} + b\sum_{s=i}^{j-1}(q^\alpha_{s,j} - q^\alpha_{s,j-1}) \\ \iff \quad & 0 \leqslant q^{F\circ\alpha}_{j,d-1} - q^{F\circ\alpha}_{j,d} + b\sum_{s=i}^{j-1}(q^\alpha_{s,j} - q^\alpha_{s,j-1}) - b\sum_{s=i}^{j-1}(q^\alpha_{s+1,j+1} - q^\alpha_{s+1,j}) \\ \iff \quad & 0 \leqslant q^{F\circ\alpha}_{j,d-1} - q^{F\circ\alpha}_{j,d} \end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant vérifiée par (I).
On obtient des inclusions renversées sur les duaux : on a $Q^\star_{min} \supseteq Q^\star \supseteq Q^\star_{max}$, d'où $A_{Q_{max},g,l} \subseteq A_{Q,g,l} \subseteq A_{Q_{min},g,l}$ et $a_{Q_{min},g,l} \leqslant a_{Q,g,l} \leqslant a_{Q_{max},g,l}$.

La simplification importante qui est faite en « oubliant » le jeu d'inégalités (III) dans la définition de Q_{max} et Q_{min} est qu'on se retrouve à manipuler des inégalités qui sont chacune de la forme $q_\beta \leqslant q_{\beta'}$ pour deux indices $\beta, \beta' \in S \times I$. Or lorsqu'un cône convexe admet une présentation de cette forme, il existe une méthode générale pour donner une présentation en terme d'inégalités du dual de ce cône. Dans ce qui suit on présente ce résultat, conséquence du théorème Flot-Maximal-Coupe-Minimale. On l'applique ensuite aux cônes Q_{min} et Q_{max}.

4.1.1 Théorème Flot-Max/Coupe-Min et dualisation de cônes convexes

On rappelle le contexte et l'énoncé du théorème Flot-Maximal-Coupe-Minimale : soit G un graphe fini orienté. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des sommets de G et $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes. On suppose que deux sommets D (pour départ) et A (pour arrivée) sont distingués. Pour chaque arête a du graphe, on note $s_1(a)$ (respectivement $s_2(a)$) le sommet de départ (resp. d'arrivée) de a, et on se donne un nombre $c(a) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = \overline{\mathbb{R}}_+$, appelé capacité de a.

Dans ce contexte un flot f de D vers A est une fonction de l'ensemble des arêtes de G dans $\mathbb{R}$ telle que

(i) $\forall a \in \mathcal{A}$, $0 \leqslant f(a) \leqslant c(a)$

(ii) $\forall s \in \mathcal{S}$, $s \notin \{D, A\}$, $\sum_{a\in\mathcal{A},\ s_1(a)=s} f(a) = \sum_{a\in\mathcal{A},\ s_2(a)=s} f(a)$.

Un flot f vérifie donc la propriété suivante : on a

$$\sum_{a\in\mathcal{A},\ s_1(a)=D} f(a) - \sum_{a\in\mathcal{A},\ s_2(a)=D} f(a) = \sum_{a\in\mathcal{A},\ s_2(a)=A} f(a) - \sum_{a\in\mathcal{A},\ s_1(a)=A} f(a).$$

On appelle valeur de f et on note $|f|$ le nombre $\sum_{a\in\mathcal{A},\ s_1(a)=D} f(a) - \sum_{a\in\mathcal{A},\ s_2(a)=D} f(a)$.

Une coupe C de G est une partition de l'ensemble des sommets $\mathcal{S}$ en deux parties C_D et C_A telles que $D \in C_D$ et $A \in C_A$.
La capacité de la coupe, notée $|C|$, est la somme des capacités des arêtes $a \in \mathcal{A}$ ayant leur sommet de départ dans C_D et leur sommet d'arrivée dans C_A.

On vérifie que pour tout flot f de D vers A et pour toute coupe C, on a $|f| \leqslant |C|$. Donc $\sup_{f \text{ flot}} |f| \leqslant \min_{C \text{ coupe}} |C|$.

Théorème 4.1.2. *(Flot-Maximal-Coupe-Minimale). On a*

$$\sup_{f \text{ flot}} |f| = \min_{C \text{ coupe}} |C|$$

et la borne supérieure est atteinte.

Démonstration. Voir une référence, par exemple [PaS]. □

Dualisation de cônes convexes

Appliquons le résultat ci-dessus à la dualisation de cônes.

Définition 4.1.3. *Soit G un graphe fini orienté, dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des sommets et $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes. Pour $a \in \mathcal{A}$ on note encore $s_1(a)$ (respectivement $s_2(a)$) le sommet de départ (resp. d'arrivée) de a.*
On note Q_G le cône convexe $\{(x_s)_{s\in\mathcal{S}}\ ;\ \forall a \in \mathcal{A}, x_{s_2(a)} \leqslant x_{s_1(a)}\}$ de $E_G = \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ (muni du produit scalaire standard).
On dit qu'une partie $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ est admissible si toute arête de G ayant son sommet de départ dans $\mathcal{S}'$ a aussi son sommet d'arrivée dans $\mathcal{S}'$.

Proposition 4.1.4. *Avec les notations de la définition 4.1.3, le cône dual $Q_G^\star$ de Q_G dans l'espace euclidien E_G admet la présentation suivante : si $(x_s)_s \in E_G$, on a $(x_s)_s \in Q_G^\star$ ssi $\sum_{s\in\mathcal{S}} x_s = 0$ et pour tout $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ admissible, $\sum_{s\in\mathcal{S}'} x_s \leqslant 0$.*

Démonstration. Notons $(e_s)_{s\in\mathcal{S}}$ la base canonique de $E_G = \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$. Si H est l'hyperplan défini par l'équation $\sum_{s\in\mathcal{S}} x_s = 0$, on a $Q_G^\star \subseteq H$ par définition de Q_G. En effet $Q_G = \bigcap_{a\in\mathcal{A}} \{\langle v_a|\cdot\rangle \geqslant 0\}$ où $v_a = e_{s_1(a)} - e_{s_2(a)}$, donc $Q_G^\star$ est le cône convexe engendré par les v_a, qui sont tous dans H.
Si $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ est admissible, notons $\mathbb{1}_{\mathcal{S}'}$ sa fonction indicatrice. Alors on a $-\mathbb{1}_{\mathcal{S}'} \in Q_G$, donc pour $x = (x_s) \in Q_G^\star$, on obtient $\langle x|\mathbb{1}_{\mathcal{S}'}\rangle = \sum_{s\in\mathcal{S}'} x_s \leqslant 0$. On a montré une des implications de l'énoncé.

Réciproquement, supposons que $x = (x_s) \in E_G$ vérifie les conditions décrites dans l'énoncé. On choisit N un nombre assez grand pour avoir $x_s + N \geqslant 0$ pour tout $s \in \mathcal{S}$.
Soit $\tilde{G}$ le graphe obtenu à partir de G en rajoutant deux sommets D et A et, pour tout sommet s de G, une arête allant de D à s et une arête allant de s à A. Soit c la capacité sur $\tilde{G}$ définie par $c(a) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \in \mathcal{A} \\ x_s + N & \text{si } a \text{ part de } D \text{ et arrive à un sommet } s \in \mathcal{S} \\ N & \text{si } a \text{ part d'un sommet } s \in \mathcal{S} \text{ et arrive } A. \end{cases}$

Soit n le nombre de sommets de G. Montrons que $c_{min} = \min_{C \text{ coupe de } \tilde{G}} |C| \geqslant nN$: on prend une coupe $C = (C_D, C_A)$ et on pose $\mathcal{S}' = C_D \backslash \{D\} \subseteq \mathcal{S}$. Il y a deux cas : supposons d'abord $\mathcal{S}'$ admissible. Dans ce cas les seules arêtes de $\tilde{G}$ commençant dans C_D et finissant dans C_A sont celles reliant D à un sommet $s \in \mathcal{S}\backslash\mathcal{S}'$ ou reliant un $s \in \mathcal{S}'$ à A, donc on a $|C| = \sum_{s\in\mathcal{S}'} N + \sum_{s\in\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}'}(x_s + N) = nN - \sum_{s\in\mathcal{S}'} x_s \geqslant nN$. Le deuxième cas se traite de manière analogue.

Par le théorème Flot-Maximal-Coupe-Minimale (4.1.2) il existe un flot f sur $\tilde{G}$ de valeur c_{min}. Or la somme des capacités des arêtes sortant de D est $\sum_{s\in\mathcal{S}}(x_s + N) = nN$ donc on a $|f| \leqslant nN$. Donc $c_{min} = nN$ et pour toute arête a sortant de D et de sommet d'arrivée $s \in \mathcal{S}$, $f(a)$ est maximum *i.e.* vaut $x_s + N$. Mais on a aussi $|f| = \sum_{a,\ s_2(a)=A} f(a)$ donc le même raisonnement montre que pour toute arête a reliant un $s \in \mathcal{S}$ à A, on a $f(a) = N$. Finalement pour tout $s \in \mathcal{S}$ le flot f vérifie $\sum_{a,\ s_1(a)=s} f(a) - \sum_{a,\ s_2(a)=s} f(a) = 0$ ce qui donne

$$\sum_{a\in\mathcal{A},\ s_1(a)=s} f(a) - \sum_{a\in\mathcal{A},\ s_2(a)=s} f(a) = x_s.$$

On en déduit que si $y = (y_s) \in Q_G$, on a

$$\langle x|y\rangle = \sum_{s\in\mathcal{S}} y_s. \left(\sum_{a\in\mathcal{A},\ s_1(a)=s} f(a) - \sum_{a\in\mathcal{A},\ s_2(a)=s} f(a) \right) = \sum_{a\in\mathcal{A}} (y_{s_1(a)} - y_{s_2(a)}).f(a) \geqslant 0$$

d'où $x \in Q_G^\star$. □

4.1.2 Une présentation de Q_{min} et Q_{max}

On utilise la proposition 4.1.4. Définissons d'abord les parties admissibles dans ce cadre.

Définition 4.1.5. *Une partie X de $I = \{(i,j) \in [\![1,d]\!]\ ;\ i \leqslant j\}$ est dite admissible si $\forall(i,j) \in X, (j < d \Rightarrow (i,j+1) \in X)$ et $(i > 1 \Rightarrow (i-1,j-1) \in X)$.*
Une partie X de $S \times I$ est dite admissible si pour tout $\alpha \in S$, $X \cap (\{\alpha\} \times I)$, vue comme une partie de I, est admissible.

Proposition 4.1.6. *Le cône convexe $Q_{min}^\star$ s'écrit*

$$\left\{ (q_{i,j}^\alpha) \in \mathbb{R}^{S\times I}\ ;\ \sum_{(\alpha,(i,j))\in S\times I} q_{i,j}^\alpha = 0 \ \text{et}\ \forall\alpha \in S, \forall s \in [\![1,d]\!], \sum_{(i,j)\in I,\ j-i\geqslant d-s} q_{i,j}^\alpha \leqslant 0 \right\}$$

et $Q_{max}^\star$ s'écrit

$$\left\{ (q_{i,j}^\alpha) \in \mathbb{R}^{S\times I}\ ;\ \sum_{(\alpha,(i,j))\in S\times I} q_{i,j}^\alpha = 0 \ \text{et}\ \forall X \subseteq S\times I \ \text{admissible}, \sum_{(\alpha,(i,j))\in X} q_{i,j}^\alpha \leqslant 0 \right\}$$

ou encore

$$\left\{ (q_{i,j}^\alpha) \in \mathbb{R}^{S\times I}\ ;\ \sum_{(\alpha,(i,j))\in S\times I} q_{i,j}^\alpha = 0 \ \text{et}\ \forall\alpha \in S, \forall X \subseteq I \ \text{admissible}, \sum_{(i,j)\in X} q_{i,j}^\alpha \leqslant 0 \right\}.$$

Démonstration. On applique la proposition 4.1.4 à des graphes bien choisis. Par exemple pour Q_{max} on prend le graphe G dont l'ensemble des sommets est $S \times I$ est l'ensemble des arêtes est, avec des notations évidentes, $\{(\alpha,(i,j)) \to (\alpha,(i,j+1))\ ;\ (\alpha,(i,j)) \in S \times I$ et $j < d\} \cup \{(\alpha,(i+1,j+1)) \to (\alpha,(i,j))\ ;\ (\alpha,(i,j)) \in S \times I$ et $j < d\}$. □

Dans le lemme suivant on décrit différemment les parties admissibles.

Lemme 4.1.7. *On a des bijections réciproques*

$$\begin{array}{rcl} \{\text{parties admissibles de } I\} & \longleftrightarrow & \{\text{parties de } [\![1,d]\!]\} \\ X & \longrightarrow & \{s \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ ;\exists i \in [\![1,d]\!], s = \#\{j\ ;\ (i,j) \in X\}\} \\ \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant \#T} \{i\} \times [\![d-t_i+1,d]\!] & \longleftarrow & T = \{t_1 > \cdots > t_{\#T}\}. \end{array}$$

Démonstration. Si X est admissible, la fonction $f : [\![1,d]\!] \to \mathbb{N}, i \mapsto \#\{j\ ;\ (i,j) \in X\}$ est décroissante, et de plus si $i < d$ vérifie $f(i) > 0$, on a $f(i) > f(i+1)$. □

Définition 4.1.8. *Pour $\alpha' \in S$ et $X \subseteq I$ admissible, on note $\mathscr{S}_X^{\alpha'}$ la forme linéaire $\mathbb{R}^{S\times I} \to \mathbb{R}, (q_{i,j}^\alpha) \mapsto \sum_{(i,j)\in X} q_{i,j}^{\alpha'}$. Si T est le sous-ensemble de $[\![1,d]\!]$ correspondant à X* via *la bijection du lemme 4.1.7, on note aussi $\mathscr{S}_T^{\alpha'} = \mathscr{S}_X^{\alpha'}$.*
On note enfin $\mathscr{S}$ la forme linéaire $\mathbb{R}^{S\times I} \to \mathbb{R}, (q_{i,j}^\alpha) \mapsto \sum_{(\alpha,(i,j))\in S\times I} q_{i,j}^\alpha$.

Avec ces nouvelles définitions, on a

$$Q_{min}^\star = \left\{x \in \mathbb{R}^{S\times I}\ ; \mathscr{S}(x) = 0 \text{ et } \forall \alpha' \in S, \forall s \in [\![1,d]\!], \mathscr{S}_{[\![1,s]\!]}^{\alpha'}(x) \leqslant 0\right\}$$

et

$$Q_{max}^\star = \left\{x \in \mathbb{R}^{S\times I}\ ; \mathscr{S}(x) = 0 \text{ et } \forall \alpha' \in S, \forall T \subseteq [\![1,d]\!], \mathscr{S}_T^{\alpha'}(x) \leqslant 0\right\}.$$

On termine en injectant les présentations obtenues dans la définition de $A_{Q_{min},g,l}$ et $A_{Q_{max},g,l}$.

4.1.3 Retour aux convexes $A_{Q_{min},g,l}$ et $A_{Q_{max},g,l}$

On a (voir la définition 3.3.4)

$$A_{Q_{max},g,l} = \left\{(y_j^\alpha) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}\ ; \sum_{\alpha\in S}\sum_{j\in[\![1,d]\!]} y_j^\alpha.\vec{\mu}_j^\alpha - \vec{l} \in Q_{max}^\star\right\}$$

donc si $y = (y_j^\alpha) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$ on a $y \in A_{Q_{max},g,l}$ ssi

$$\sum_{\alpha,j} y_j^\alpha.\mathscr{S}(\vec{\mu}_j^\alpha) - \mathscr{S}(\vec{l}) = 0 \text{ et } \forall \alpha' \in S, \forall T \subseteq [\![1,d]\!], \sum_{\alpha,j} y_j^\alpha.\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^\alpha) - \mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{l}) \leqslant 0. \qquad (4.1)$$

On a bien sûr une caractérisation analogue pour $A_{Q_{min},g,l}$.

Calculons les nombres $\mathscr{S}(\vec{\mu}_j^\alpha)$, $\mathscr{S}(\vec{l})$, $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^\alpha)$, etc.

Lemme 4.1.9. *Soient $\alpha, \alpha' \in S$, $j \in [\![1,d]\!]$ et $T \subseteq [\![1,d]\!]$. Dans les formules suivantes, $\mathbb{1}_T$ est la fonction indicatrice de T et on pose $[(\#T) \geqslant j] = \begin{cases} 1 & \text{si } \#T \geqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.*
On a $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{l}) = b\left(\sum_{t\in T} t - \frac{\#T(\#T+1)}{2}\right) - (\#T)(d-\#T)$.

Si $T = \emptyset$, on a $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^\alpha) = 0$.

Supposons dans la suite $T = \{t_1 > \cdots > t_{\#T}\}$ avec $\#T > 0$. On a les résultats suivants :

- *si $F \circ \alpha = \alpha$,*
  - *si $\alpha' \neq \alpha$, $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^\alpha) = 0$*
  - *sinon $\alpha' = \alpha = F \circ \alpha$, et $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^\alpha) = b.\mathbb{1}_T(d+1-j) - [\#T \geqslant j]$*

- *sinon* $F \circ \alpha \neq \alpha$,

  - *si* $\alpha' \notin \{\alpha, F \circ \alpha\}$, $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^\alpha) = 0$
  - *si* $\alpha' = \alpha$, $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^\alpha) = b.\mathbb{1}_T(d+1-j)$
  - *si* $\alpha' = F \circ \alpha$, $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^\alpha) = -[\#T \geqslant j]$.

On a également $\mathscr{S}(\vec{\mu}_j^\alpha) = b-1$ *et* $\mathscr{S}(\vec{l}) = 0$.

Démonstration. Les vecteurs $\vec{\mu}_j^\alpha$, $\vec{l}$ sont explicites. Faisons le calcul de $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{l})$ et $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^\alpha)$ dans le cas $T \neq \emptyset$ (et $\alpha' = \alpha = F \circ \alpha$ pour le second nombre), afin de donner une idée de la méthode.

Représentons les vecteurs de $\mathbb{R}^{S \times I}$ par des familles de matrices triangulaires supérieures indexées par S : $(q_{i,j}^\alpha) \in \mathbb{R}^{S \times I}$ correspond à la donnée pour chaque $\alpha \in S$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} q_{1,1}^\alpha & \dots & \dots & q_{1,d}^\alpha \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & q_{d,d}^\alpha \end{pmatrix}.$$

Pour $\vec{l}$ il se trouve (voir la formule dans la définition 3.3.1 de l) que les matrices indicées par les différents α sont toutes égales à la matrice N suivante :

$$b.\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} - b.\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 2-d-1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 2d-d-1 \end{pmatrix}.$$

Par le lemme 4.1.7, la partie admissible associée à T est $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant \#T} \{i\} \times [\![d - t_i + 1, d]\!]$. Ainsi $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{l})$ est la somme pour i allant de 1 à $\#T$ des t_i derniers coefficients de la i-ème ligne de N, donc

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{l}) &= b\sum_{i=1}^{\#T} t_i - b\sum_{i=1}^{\#T} 1 + \sum_{i=1}^{\#T}(2i-d-1) \\ &= b\left(\sum_{t \in T} t - \frac{\#T(\#T+1)}{2}\right) - (\#T)(d - \#T). \end{aligned}$$

De façon analogue, pour calculer $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^\alpha)$ dans le cas $T \neq \emptyset$ et $\alpha' = \alpha = F \circ \alpha$, on considère la matrice N' d'indice α de $\vec{\mu}_j^\alpha$, qui est

$$\begin{pmatrix} & & -b & b & & \\ & & \vdots & \vdots & & \\ & & -b & \vdots & & \\ & & & b & & 1 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

la colonne de b étant d'indice j et la ligne du coefficient 1 également. On vérifie que pour $1 \leqslant i \leqslant \#T$, la somme des t_i derniers coefficients de N' est $b[t_i = d+1-j] + [i=j]$ (on note encore $[\mathcal{R}] = 1$ si une assertion $\mathcal{R}$ est vraie et $[\mathcal{R}] = 0$ sinon).
Ainsi $\mathscr{S}_T^{\alpha'}(\vec{\mu}_j^{\alpha}) = \sum_{i=1}^{\#T}(b[t_i = d+1-j] + [i=j]) = b\mathbb{1}_T(d+1-j) + [\#T \geqslant j]$. □

Introduisons enfin une énième présentation de $A_{Q_{max},g,l}$ et $A_{Q_{min},g,l}$, utile dans la suite.

Définition 4.1.10. *Pour $\alpha' \in S$ et $T \subseteq [\![1,d]\!]$ on définit la fonction $\mathscr{F}_T^{\alpha'} : \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]} \to \mathbb{R}$ par*

$$\mathscr{F}_T^{\alpha'}((y_j^{\alpha})) = \sum_{j=1}^{\#T} y_j^{F^{-1}\circ\alpha'} - b\sum_{t\in T} y_{d+1-t}^{\alpha'} - (\#T)(d-\#T) + b\left(\sum_{t\in T} t - \frac{\#T(\#T+1)}{2}\right).$$

Proposition 4.1.11. *On a*

$$A_{Q_{max},g,l} = \left\{ y = (y_j^{\alpha}) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]} \ ; \sum_{(\alpha,j)\in S\times[\![1,d]\!]} y_j^{\alpha} = 0 \ \text{ et } \forall \alpha' \in S, \forall T \subseteq [\![1,d]\!], \mathscr{F}_T^{\alpha'}(y) \geqslant 0 \right\}$$

et

$$A_{Q_{min},g,l} = \left\{ y = (y_j^{\alpha}) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]} \ ; \sum_{(\alpha,j)\in S\times[\![1,d]\!]} y_j^{\alpha} = 0 \ \text{ et } \forall \alpha' \in S, \forall s \in [\![1,d]\!], \mathscr{F}_{[\![1,s]\!]}^{\alpha'}(y) \geqslant 0 \right\}.$$

Démonstration. Cela vient de la caractérisation (4.1) (et d'une caractérisation analogue pour $A_{Q_{min},g,l}$) et des calculs du lemme 4.1.9. □

Dans la section suivante, on calcule les points extrémaux de $A_{Q_{max},g,l}$.

4.2 Les points extrémaux de $A_{Q_{max},g,l}$

La fonction $a_{Q_{max},g,l}$, qui nous intéresse pour calculer la dimension des variétés de Kisin, vérifie $a_{Q_{max},g,l}(y) = \inf_{z\in A_{Q_{max},g,l}} \langle z|y\rangle$ pour $y \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$. Ainsi il est utile de calculer les points extrémaux du convexe $A_{Q_{max},g,l}$.
On commence par faire un rappel de géométrie convexe.

4.2.1 Rappel de géométrie convexe

On donne ici le résultat caractérisant les points extrémaux d'un convexe d'un espace euclidien, défini comme une intersection finie de demi-espaces affines.

Définition 4.2.1. *Si P est un convexe d'un espace vectoriel réel, on note $Ext(P)$ les points extrémaux de P.*

Proposition 4.2.2. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de dimension n. Soient $r \geqslant 1$ et $f_1, \dots, f_r$ des formes linéaires non nulles sur $\mathcal{E}$, et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$. On considère le convexe*

$$P = \{x \in \mathcal{E} \ ; \ \forall i \in [\![1,r]\!], f_i(x) \geqslant a_i\}.$$

Si y est un point extrémal de P, alors il existe $\Lambda \subseteq [\![1,r]\!]$ de cardinal n tel que pour tout $i \in \Lambda$, $f_i(y) = a_i$ et $(f_i)_{i\in\Lambda}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les f_i pour $1 \leqslant i \leqslant r$ vérifiant $f_i(y) = a_i$. En particulier on a $\dim(\bigcap_{i\in\Lambda} Ker(f_i)) = 0$.

Démonstration. Supposons que $y \in Ext(P)$. Soit alors $\Delta = \{i \; ; \; f_i(y) = a_i\}$, et n' la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}'$ (dual de $\mathcal{E}$) engendré par $\{f_i \; ; \; f_i(y) = a_i\}$. Soit $\Lambda \subseteq \Delta$ tel que les f_i pour $i \in \Lambda$ forment une base de $\mathcal{F}$.
Supposons par l'absurde que $n' < n$. On a $\dim(\bigcap_{i\in\Delta} Ker(f_i)) = \dim(\bigcap_{i\in\Lambda} Ker(f_i)) \geqslant n - n' > 0$. On prend donc $x \in (\bigcap_{i\in\Delta} Ker(f_i))\backslash\{0\}$ et $t \in \mathbb{R}^\times$ tel que pour tout $i \in [\![1, r]\!]\backslash\Delta$, $|t.f_i(x)| < f_i(y) - a_i$.
Alors pour $i \in [\![1, r]\!]$, soit $i \in \Delta$ et alors $f_i(y + t.x) = a_i$, soit $i \notin \Delta$ et $f_i(y + t.x) > a_i$. Ainsi on a $y + t.x \in P$. De la même façon on montre $y - t.x \in P$. C'est contradictoire puisque y est extrémal. □

Corollaire 4.2.3. *On reprend les notations de la proposition 4.2.2. L'image de l'application*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \Lambda \subseteq [\![1, r]\!] \text{ tels que } \#\Lambda = n \text{ et} \\ \text{les } f_i, i \in \Lambda, \text{ sont linéairement} \\ \text{indépendants et } \emptyset \neq \bigcap_{i\in\Lambda}\{f_i = a_i\} \subseteq P \end{array} \right\} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \Lambda & \longmapsto & \text{l'unique élément de } \bigcap_{i\in\Lambda}\{f_i = a_i\} \end{array}$$

est $Ext(P)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'image est dans $Ext(P)$. Soit Λ comme demandé, $c \in P$ son image. Montrons que c est un point extrémal. Supposons que $x, y \in P$ et $t \in [0, 1]$ vérifient $c = tx + (1 - t)y$ avec $x \neq c$. Si $i \in \Lambda$, on a

$$f_i(y) = \frac{a_i - t.f_i(x)}{1 - t} = a_i - \frac{t}{1 - t}(f_i(x) - a_i) \leqslant a_i$$

donc $f_i(y) = a_i$ pour tout $i \in \Lambda$. Mais $\dim(\bigcap_{i\in\Lambda} Ker(f_i)) = 0$ donc $y = c$. □

4.2.2 Le calcul des points extrémaux

Définition 4.2.4. *Soit $\vec{\rho} = (\frac{d+1}{2} - j)_{\alpha\in S, j\in[\![1,d]\!]}$ la demi-somme des racines positives du système des racines de (G, T).*
Notons σ_0 le morphisme de groupe $\prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d \to \prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d, (w_\alpha)_\alpha \mapsto (w_{F^{-1}\circ\alpha})_\alpha$.
On fait agir le groupe $\prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d$ sur $\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$ par $(w_\alpha)_\alpha \cdot (z_j^\alpha)_{\alpha,j} = \left(z^\alpha_{w_\alpha^{-1}(j)}\right)_{\alpha,j}$.

Pour $w \in \prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d$, on note

$$\vec{\rho}_w = \vec{\rho} + (b - 1).\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1} \sigma_0^k \left(w^{-1}\right)\right) \cdot \vec{\rho}}{b^n}$$

Remarque 4.2.5. Les éléments $\prod_{k=0}^{n-1} \sigma_0^k \left(w^{-1}\right) = w^{-1} \cdot \sigma_0(w^{-1}) \cdots \sigma_0^{n-1}(w^{-1})$ pour $n \geqslant 1$ agissent sur $\vec{\rho}$ en permutant ses composantes, en particulier la suite $\left(\prod_{k=0}^{n-1} \sigma_0^k \left(w^{-1}\right)\right) \cdot \vec{\rho}$ est bornée dans $\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$, il est donc clair que la série apparaissant dans la définition de $\vec{\rho}_w$ est convergente.

Le but de cette sous-section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2.6. *On suppose $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d + 1)$. Alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d & \longrightarrow & Ext(A_{Q_{max},g,l}) \\ w & \longmapsto & \vec{\rho}_w \end{array}$$

est bien définie et est une bijection.

On a besoin de deux lemmes.

Lemme 4.2.7. *Soient m et n des entiers tels que $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant d$, et $y = (y_j^\alpha) \in A_{Q_{max},g,l}$. Alors pour tout $\alpha \in S$ on a*

$$-m(n-m) \leqslant \sum_{j=m+1}^{n} y_j^\alpha \leqslant (n-m)(d-n).$$

Remarque 4.2.8. En particulier on a pour tout α, $\sum_{1 \leqslant j \leqslant d} y_j^\alpha = 0$ ce qui n'était pas évident *a priori.*

Démonstration. On utilise la description de $A_{Q_{max},g,l}$ donnée dans la proposition 4.1.11. D'abord si $m = 0$, on a en prenant $T = [\![d+1-n, d]\!]$, $\mathscr{F}_T^\alpha(y) \geqslant 0$, *i.e.* $\sum_{i=1}^n y_j^{F^{-1}\circ\alpha} - b\sum_{i=1}^n y_j^\alpha \geqslant n(d-n)(1-b)$, pour tout $\alpha \in S$. On note $m' = \#S$. Donc

$$\sum_{s=0}^{m'-1} b^{m'-1-s} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{F^{-s-1}\circ\alpha} - b \sum_{j=1}^{n} y_j^{F^{-s}\circ\alpha} \right) \geqslant n(d-n)(1-b) \sum_{s=0}^{m'-1} b^{m'-1-s}$$

i.e. $\sum_{j=1}^n y_j^{F^{-m'}\circ\alpha} - b^{m'} \sum_{j=1}^n y_j^\alpha \geqslant n(d-n)(1-b)\frac{1-b^{m'}}{1-b}$. Mais $F^{-m'} \circ \alpha = \alpha$ et $1 - b^{m'} < 0$ puisque $m' \geqslant 1$, donc $\sum_{j=1}^n y_j^\alpha \leqslant n(d-n)$. On a la majoration pour $m = 0$.

Maintenant si $m > 0$, alors en écrivant l'inégalité $\mathscr{F}_T(y) \geqslant 0$ pour $T = [\![d+1-n, d-m]\!]$ on obtient, pour tout α, $\sum_{j=m+1}^n y_j^\alpha - \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{n-m} y_j^{F^{-1}\circ\alpha} \leqslant -\frac{1}{b}(n-m)(d-n+m) + (n-m)(d-n)$ donc par ce qui précède,

$$\sum_{j=m+1}^{n} y_j^\alpha \leqslant \frac{1}{b}(n-m)(d-n+m) - \frac{1}{b}(n-m)(d-n+m) + (n-m)(d-n) = (n-m)(d-n)$$

ce qui démontre la majoration.

Passons à la minoration. On note $\overline{\cdot} : [\![1,d]\!] \to [\![1,d]\!], i \mapsto d+1-i$ et $\overline{y} = (y_{d+1-j}^\alpha)_{\alpha,j}$. On note aussi ${}^cT$ le complémentaire dans $[\![1,d]\!]$ d'un ensemble T. Enfin pour tout $T \subseteq [\![1,d]\!]$ on définit

$$[T] = (b-2)(\#T)(d-\#T) + b\left(\sum_{t\in T} t + \sum_{t \in {}^c(\overline{T})} t\right) - \frac{b}{2}d(d+1).$$

Montrons que pour tous T et α on a

$$\mathscr{F}_T^\alpha(\overline{y}) \leqslant \left[\overline{({}^cT)}\right]. \tag{4.2}$$

Un calcul simple montre que pour tous T et α on a

$$\mathscr{F}_T^\alpha(y) + \mathscr{F}_{{}^c(\overline{T})}^\alpha(\overline{y}) = \sum_{j=1}^{d} y_j^{F^{-1}\circ\alpha} - b\sum_{j=1}^{d} y_j^\alpha + [T]$$

or d'après la partie « majoration », on a pour tout α, $\sum_{j=1}^d y_j^\alpha \leqslant (d-0)(d-d) = 0$, donc $\sum_{j=1}^d y_j^\alpha = -\sum_{\alpha'\neq\alpha}\sum_{j=1}^d y_j^{\alpha'} \geqslant 0$ et ainsi $\sum_{j=1}^d y_j^\alpha = 0$. Ainsi $\mathscr{F}_T^\alpha(y) + \mathscr{F}_{{}^c(\overline{T})}^\alpha(\overline{y}) = [T]$. Mais $y \in A_{Q_{max},g,l}$ donc $\mathscr{F}_T^\alpha(y) \geqslant 0$. D'où $\mathscr{F}_{{}^c(\overline{T})}^\alpha(\overline{y}) \leqslant [T]$ et on obtient (4.2) en faisant $T = \overline{({}^cT)}$.

On applique l'inégalité (4.2) avec $T = [\![d+1-n, d]\!]$ pour un $n \in [\![1, d]\!]$. On obtient après calcul

$$\sum_{j=d+1-n}^{d} y_j^{F^{-1}\circ\alpha} - b \sum_{j=d+1-n}^{d} y_j^{\alpha} \leqslant (b-1)n(d-n)$$

d'où

$$\sum_{s=0}^{m'-1} b^{m'-1-s} \left(\sum_{j=d+1-n}^{d} y_j^{F^{-s-1}\circ\alpha} - b \sum_{j=d+1-n}^{d} y_j^{\alpha} \right) \leqslant (b-1)n(d-n)\frac{1-b^{m'}}{1-b}$$

et $\sum_{j=d+1-n}^{d} y_j^{\alpha} \geqslant -n(d-n) = -(d-n)(d-(d-n))$. Autrement dit pour $m \in [\![1, d]\!]$ on a

$$\sum_{j=m+1}^{d} y_j^{\alpha} \geqslant -m(d-m). \tag{4.3}$$

On termine la preuve en prenant $0 \leqslant m < n \leqslant d$ et $T = [\![d+1-n, d-m]\!]$. On a $\overline{({}^cT)} = [\![1, m]\!] \sqcup [\![n+1, d]\!]$ et (4.2) donne

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-m} y_{d+1-j}^{F^{-1}\circ\alpha} - b \sum_{j=d+1-n}^{d-m} y_j^{\alpha} \leqslant \quad & (n-m)(d-n+m) - b\left(\sum_{t\in T} t - \frac{(n-m)(n-m+1)}{2}\right) \\
& + (b-2)(d-n+m)(n-m) + b\left(\sum_{t\in T} t + \sum_{t\in\overline{({}^cT)}} t\right) - \frac{b}{2}(d^2+d) \\
= \quad & (b-1)(n-m)(d-n+m) + bm(m-n)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
-b\sum_{j=d+1-n}^{d-m} y_j^{\alpha} &\leqslant (b-1)(n-m)(d-n+m) + bm(m-n) - \sum_{j=d+m-n+1}^{d} y_j^{F^{-1}\circ\alpha} \\
&\leqslant (b-1)(n-m)(d-n+m) + bm(m-n) + (d-n+m)(n-m) \\
&= b(n-m)(d-n)
\end{aligned}$$

où pour la deuxième inégalité on a utilisé (4.3) avec $m = d+m-n$. Cela établit le lemme. □

Lemme 4.2.9. *On suppose $b > d$. Soient T_1, T_2 deux parties de $[\![1, d]\!]$, et $y \in A_{Q_{max},g,l}$. Alors on a (pour tout $\alpha \in S$)*

$$\mathscr{F}_{T_1}^{\alpha}(y) + \mathscr{F}_{T_2}^{\alpha}(y) \geqslant \mathscr{F}_{T_1\cap T_2}^{\alpha}(y) + \mathscr{F}_{T_1\cup T_2}^{\alpha}(y)$$

et il y a égalité ssi $T_1 \subseteq T_2$ ou $T_2 \subseteq T_1$.

Démonstration. On note $s_i = \#T_i$, $s_{12} = \#(T_1\cap T_2)$, $s'_{12} = \#(T_1\cup T_2)$ et $s = s_1 - s_{12} = s'_{12} - s_2$ (donc $s \geqslant 0$). Quitte à échanger T_1 et T_2 on peut supposer $s_1 \leqslant s_2$. Un calcul donne

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{T_1}^{\alpha}(y) + \mathscr{F}_{T_2}^{\alpha}(y) - \mathscr{F}_{T_1\cap T_2}^{\alpha}(y) - \mathscr{F}_{T_1\cup T_2}^{\alpha}(y) &= \sum_{j=s_{12}+1}^{s_1} y_j^{F^{-1}\circ\alpha} - \sum_{j=s_2+1}^{s'_{12}} y_j^{F^{-1}\circ\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{2}s(b-2)(s'_{12}+s_2-s_1-s_{12}) \\
&\geqslant -s_{12}(s_1-s_{12}) - (s'_{12}-s_2)(d-s'_{12}) \\
&\quad + \frac{1}{2}s(b-2)(s'_{12}+s_2-s_1-s_{12}) \\
&= s\left((b-1)(s_2-s_1) + bs - d\right)
\end{aligned}$$

où l'inégalité vient du lemme 4.2.7.

Si $s > 0$, le minorant est > 0 puisque $b > d$, ainsi on a l'inégalité et elle est stricte. Sinon $s = 0$, le minorant est nul et on a l'inégalité.
Ainsi pour qu'il y ait égalité il faut que $s = 0$ donc que $T_1 \cap T_2 = T_1$ *i.e.* $T_1 \subseteq T_2$. Réciproquement si $T_1 \subseteq T_2$ ou $T_2 \subseteq T_1$, il y a bien égalité. $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème 4.2.6.

Démonstration. On sait que $A_{Q_{max},g,l} = \{\mathscr{F}_+ \geqslant 0\} \cap \{\mathscr{F}_- \geqslant 0\} \cap \left(\bigcap_{\alpha\in S,\ T\subseteq[\![1,d]\!]}\{\mathscr{F}_T^\alpha \geqslant 0\}\right)$, avec $\mathscr{F}_\pm : \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]} \to \mathbb{R}, (y_j^\alpha) \mapsto \pm\sum_{\alpha,j} y_j^\alpha$. Mais $\mathscr{F}_- = \frac{1}{b-1}\sum_{\alpha\in S}\mathscr{F}^\alpha_{[\![1,d]\!]}$. Notons $\mathscr{F}_{(\alpha,T)} = \mathscr{F}_T^\alpha$ pour la suite de la preuve, $\vec{\mathscr{F}}_{(\alpha,T)}$ la forme linéaire associée, et $J = \{+\} \cup \{(\alpha, T)\ ;\ \alpha \in S,\ T \subseteq [\![1,d]\!]\}$. On a $A_{Q_{max},g,l} = \bigcap_{i\in J}\{\mathscr{F}_i \geqslant 0\}$.

On commence par montrer la surjectivité. Soit $c = (c_j^\alpha) \in Ext(A_{Q_{max},g,l})$. On a $\dim(\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}) = d \cdot \#S$. Ainsi en appliquant le corollaire 4.2.3 on sait qu'il existe $\Lambda \subseteq J$ de cardinal $d \cdot \#T$ tel que les $\vec{\mathscr{F}}_i$ pour $i \in \Lambda$ sont linéairement indépendants et $\{c\} = \bigcap_{i\in\Lambda}\{\mathscr{F}_i = 0\}$.

Montrons l'assertion, notée $(*)$, suivante : on peut choisir Λ de telle manière que pour chaque $\alpha \in S$, il existe une chaîne $\emptyset \subsetneq T_1^\alpha \subsetneq \cdots \subsetneq T_d^\alpha$ de parties de $[\![1,d]\!]$ telles que

$$\Lambda = \bigcup_{\alpha\in S}\{(\alpha, T_j^\alpha)\ ;\ 1 \leqslant j \leqslant d\}.$$

Pour $\alpha \in S$, soit $\Lambda_\alpha = \Lambda \cap (\{\alpha\} \times \mathcal{P}([\![1,d]\!]))$. Supposons $\Lambda_\alpha \neq \emptyset$, et soient $T_1, \ldots, T_r$ des parties deux à deux distinctes telles que $\Lambda_\alpha = \{(\alpha, T_j)\ ;\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$. Quitte à renuméroter on peut supposer $\#T_1 \leqslant \cdots \leqslant \#T_r$.
On a $c \in A_{Q_{max},g,l}$ et $b > d$ donc par le lemme 4.2.9 on a pour $j \in [\![1, r-1]\!]$,

$$\mathscr{F}^\alpha_{T_j}(c) + \mathscr{F}^\alpha_{T_{j+1}}(c) \geqslant \mathscr{F}^\alpha_{T_j\cap T_{j+1}}(c) + \mathscr{F}^\alpha_{T_j\cup T_{j+1}}(c) \geqslant 0$$

mais le membre de gauche fait zéro donc il y a égalité et $T_j \subsetneq T_{j+1}$, encore par le lemme 4.2.9 (on a $\#T_j \leqslant \#T_{j+1}$). Les $\vec{\mathscr{F}}_i$, $i \in \Lambda$ sont libres et $\mathscr{F}^\alpha_\emptyset \equiv 0$ donc $T_1 \neq \emptyset$. En particulier on a $\#\Lambda_\alpha \leqslant d$.
Or $\Lambda = (\Lambda \cap \{+\}) \bigsqcup (\bigsqcup_{\alpha\in S}\Lambda_\alpha)$ est de cardinal $d \cdot \#S$ donc il suffit de montrer que quitte à modifier Λ on peut demander $+ \notin \Lambda$: si $+ \in \Lambda$, il existe un unique α_0 tel que $\#\Lambda_{\alpha_0} < d$. Alors puisque

$$\begin{cases} \mathscr{F}^{\alpha_0}_{[\![1,d]\!]} = (1-b)\mathscr{F}_+ - \sum_{\alpha\neq\alpha_0}\mathscr{F}^\alpha_{[\![1,d]\!]} \\ \{(\alpha, [\![1,d]\!])\ ;\ \alpha \neq \alpha_0\} \subseteq \Lambda \\ \text{la famille } (\vec{\mathscr{F}}_i)_{i\in\Lambda} \text{ est libre} \end{cases}$$

c'est $(\alpha, [\![1,d]\!])$ qui « manque » dans Λ_α. On remplace donc Λ par $(\Lambda\backslash\{+\}) \bigsqcup \{(\alpha, [\![1,d]\!])\}$. On a démontré $(*)$.

Pour tout $\alpha \in S$, soit donc $w_\alpha^* \in \mathfrak{S}_d$ tel que pour tout $j \in [\![1,d]\!]$, $T_j^\alpha = \{w_\alpha^*(s)\ ;\ 1 \leqslant s \leqslant j\}$. Pour tous α et j on montre en faisant la différence $\mathscr{F}^\alpha_{T_j^\alpha}(c) - \mathscr{F}^\alpha_{T_{j-1}^\alpha}(c)$ (on pose $T_0^\alpha = \emptyset$) que

$$c_j^{F^{-1}\circ\alpha} - b.c_{d+1-w_\alpha^*(j)} = d + 1 - 2j - b(w_\alpha^*(j) - j).$$

Pour chaque α on note $w_\alpha \in \mathfrak{S}_d$ l'inverse de $(j \mapsto d + 1 - w_\alpha^*(j))$, et $w = (w_\alpha)$. Montrons que c est le point $\vec{\rho}_w$ défini en 4.2.4.

On pose $z_j^\alpha = c_j^\alpha - d - 1 + 2j$. On a donc $z_j^\alpha = j - w_\alpha(j) + \frac{1}{b} \cdot z_{w_\alpha(j)}^{F^{-1}\circ\alpha}$. D'où

$$\begin{aligned} z_j^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{b^n} \left(\left(\prod_{k=n-1}^{0} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(j) - \left(\prod_{k=n}^{0} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(j) \right) \\ &= j + (b-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{b^n} \left(\prod_{k=n-1}^{0} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(j) \end{aligned}$$

donc pour tous α et j on a $c_j^\alpha = (b-1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^n} \left(d + 1 - j - \left(\prod_{k=n-1}^{0} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(j) \right)$. Un petit calcul donne alors

$$c = \vec{\rho} + (b-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^n} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sigma_0^k(w^{-1}) \right) \cdot \vec{\rho} = \vec{\rho}_w.$$

On a obtenu la surjectivité.

Montrons maintenant que l'application est bien définie, *i.e.* que les $\vec{\rho}_w$ sont des points extrémaux. Si $w = (w_\alpha)$ on a

$$\vec{\rho}_w = \left((b-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^n} \left(d + 1 - j - \left(\prod_{k=n-1}^{0} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(j) \right) \right)_{j,\alpha}$$

et le calcul donne pour tous α et $T \subseteq [\![1,d]\!]$,

$$\mathscr{F}_T^\alpha(\vec{\rho}_w) = (b-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{b^n} \left[\sum_{t\in T} \left(\prod_{k=n}^{1} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(w_\alpha(d+1-t)) - \sum_{j=1}^{\#T} \left(\prod_{k=n}^{1} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(j) \right].$$

Or pour $n \geqslant 0$, on a

$$\left| \sum_{t\in T} \left(\prod_{k=n}^{1} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(w_\alpha(d+1-t)) - \sum_{j=1}^{\#T} \left(\prod_{k=n}^{1} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(j) \right| \leqslant \#T(d - \#T) \leqslant \lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor$$

car on montre par récurrence sur d que pour $T, T' \subseteq [\![1,d]\!]$ de cardinaux r, on a

$$\left| \sum_{t\in T} t - \sum_{t\in T'} t \right| \leqslant r(d-r).$$

Ainsi

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^n} \left[\sum_{t\in T} \left(\prod_{k=n}^{1} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(w_\alpha(d+1-t)) - \sum_{j=1}^{\#T} \left(\prod_{k=n}^{1} w_{F^{-k}\circ\alpha} \right)(j) \right] \right| \leqslant \frac{\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor}{b-1} \leqslant 1.$$

Le premier terme de la somme (dans l'expression ci-dessus de $\mathscr{F}_T^\alpha(\vec{\rho}_w)$) est $\sum_{t\in T} w_\alpha(d+1-t) - \sum_{j=1}^{\#T} j \in \mathbb{N}$. Si ce terme est non nul on a donc $\mathscr{F}_T^\alpha(\vec{\rho}_w) \geqslant 0$.
Sinon $\sum_{t\in T} w_\alpha(d+1-t) = \sum_{j=1}^{\#T} j$ donc $\{w_\alpha(d+1-t) \ ; \ t \in T\} = [\![1, \#T]\!]$. Dans ce cas les termes suivants de la somme sont nuls aussi, et $\mathscr{F}_T^\alpha(\vec{\rho}_w) = 0$. On a montré que $\vec{\rho}_w \in A_{Q_{max},g,l}$.

Vérifions que $\vec{\rho}_w$ est extrémal. On définit à nouveau $w^*_\alpha = (j \mapsto d+1-w_\alpha^{-1}(j)) \in \mathfrak{S}_d$ et $T_j^\alpha = \{w^*_\alpha(1), \ldots, w^*_\alpha(j)\}$. Alors on a vu que $\bigcap_{\alpha\in S,\ j\in[\![1,d]\!]}\{\mathscr{F}^\alpha_{T_j^\alpha} = 0\} = \{\vec{\rho}_w\}$. En particulier $\bigcap_{\alpha\in S,\ j\in[\![1,d]\!]}\{\vec{\mathscr{F}}^\alpha_{T_j^\alpha} = 0\} = \{0\}$ et ainsi les formes linéaires $\vec{\mathscr{F}}^\alpha_{T_j^\alpha}$ sont linéairement indépendantes pour $(\alpha, j) \in S \times [\![1,d]\!]$. Le corollaire 4.2.3 assure $\vec{\rho}_w \in Ext(A_{Q_{max},g,l})$.

On termine en montrant l'injectivité de $w \mapsto \vec{\rho}_w$: si $w = (w_\alpha)$ et $w' = (w'_\alpha)$ sont tels que $\vec{\rho}_w = \vec{\rho}_{w'}$, alors pour tous α et j on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^n}\left[\left(\prod_{k=n-1}^{0} w'_{F^{-k}\circ\alpha}\right)(j) - \left(\prod_{k=n-1}^{0} w_{F^{-k}\circ\alpha}\right)(j)\right] = 0$$

mais

$$\left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{b^n}\left[\left(\prod_{k=n-1}^{0} w'_{F^{-k}\circ\alpha}\right)(j) - \left(\prod_{k=n-1}^{0} w_{F^{-k}\circ\alpha}\right)(j)\right]\right| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{d-1}{b^n} < \frac{1}{b}$$

et la valeur absolue du premier terme de la somme est dans $\frac{1}{b}\mathbb{N}$. Donc le premier terme vaut 0, *i.e.* $w'_\alpha(j) = w_\alpha(j)$. On obtient $w = w'$. □

On a vu dans la preuve précédente que pour un $w \in \prod_{\alpha\in S}\mathfrak{S}_d$ fixé, on a $\mathscr{F}^\alpha_T(\vec{\rho}_w) = 0$ lorsque T est l'un des T^α_j associés à w. Le lemme suivant, utile dans la suite, montre qu'au contraire lorsque T n'est pas l'un des T^α_j, alors $\mathscr{F}^\alpha_T(\vec{\rho}_w) > 0$.

Lemme 4.2.10. *On suppose encore $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d+1)$. Soit $w = (w_\alpha) \in \prod_\alpha \mathfrak{S}_d$. On note encore $w^*_\alpha = (j \mapsto d+1-w_\alpha^{-1}(j))$ et $T^\alpha_j(w) = w^*_\alpha([\![1,j]\!])$. Soit $\alpha \in S$.*
Alors pour T une partie de $[\![1,d]\!]$, si T n'est pas l'un des $T^\alpha_j(w)$ on a $\mathscr{F}^\alpha_T(\vec{\rho}_w) > 0$.

Démonstration. On a vu dans la preuve du théorème 4.2.6 que $\frac{1}{b-1}\mathscr{F}^\alpha_T(\vec{\rho}_w) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{b^n}a_n$ où on a posé

$$a_n = \left[\sum_{t\in T}\left(\prod_{k=n}^{1} w_{F^{-k}\circ\alpha}\right)(w_\alpha(d+1-t)) - \sum_{j=1}^{\#T}\left(\prod_{k=n}^{1} w_{F^{-k}\circ\alpha}\right)(j)\right].$$

On a $a_0 = \sum_{t\in T} w_\alpha(d+1-t) - \sum_{j=1}^{\#T} j$. Ainsi si T n'est pas l'un des $T^\alpha_j(w)$, on a $T \neq T^\alpha_{\#T}(w)$ donc $\{w_\alpha(d+1-t)\ ;\ t\in T\} \neq [\![1,\#T]\!]$ ce qui implique $a_0 \neq 0$ et donc $a_0 \geqslant 1$.

Or on a

$$\prod_{k=(d!)(\#T)}^{1} w_{F^{-k}\circ\alpha} = \left(\prod_{k=\#T}^{1} w_{F^{-k}\circ\alpha}\right)^{d!} = Id$$

donc $a_{(d!)(\#T)} = a_0 > 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b-1}\mathscr{F}_T^\alpha(\vec{\rho}_w)\right| &= \left|a_0 + \frac{1}{b^{(d!)(\#T)}}a_{(d!)(\#T)} + \sum_{n=1,\ n\neq(d!)(\#T)}^{+\infty}\frac{1}{b^n}a_n\right| \\
&\geqslant \left|\left|a_0 + \frac{1}{b^{(d!)(\#T)}}a_{(d!)(\#T)}\right| - \left|\sum_{n=1,\ n\neq(d!)(\#T)}^{+\infty}\frac{1}{b^n}a_n\right|\right| \\
&\geqslant a_0 + \frac{1}{b^{(d!)(\#T)}}a_{(d!)(\#T)} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{b^n}|a_n| \\
&\geqslant 1 + \frac{1}{b^{(d!)(\#T)}}a_{(d!)(\#T)} - \frac{1}{b-1}\lfloor\frac{d^2}{4}\rfloor \\
&> 0
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. $\square$

4.3 Le calcul de $A_{Q,g,l}$

On avait introduit le cône convexe

$$C^\star = \left\{(z_j^\alpha) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}\ ;\ \forall\alpha\in S, \forall s\in[\![1,d]\!], \sum_{1\leqslant j\leqslant s} z_j^\alpha \geqslant 0 \text{ avec égalité si } s=d\right\}$$

pour pouvoir énoncer le théorème 3.3.3. Définissons le cône convexe C comme $\{(y_j^\alpha) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}\ ;\ \forall\alpha\in S, y_1^\alpha \geqslant \cdots \geqslant y_d^\alpha\}$. Une application de la proposition 4.1.4 assure $(C^\star)^\star = C$, la notation est donc cohérente.

Le but dans cette section est de montrer le théorème suivant.

Théorème 4.3.1. *On suppose $b \geqslant \max(\lfloor\frac{d^2}{4}\rfloor + 1, d+1)$. Alors $A_{Q_{max},g,l} + C^\star = A_{Q,g,l}$.*

La stratégie est la suivante : l'inclusion $A_{Q_{max},g,l} + C^\star \subseteq A_{Q,g,l}$ se traite facilement. Pour établir l'inclusion réciproque, on sait que au voisinage de chacun de ses points extrémaux $\vec{\rho}_w$, $A_{Q_{max},g,l}$ s'écrit $\vec{\rho}_w + D_w$ où D_w est un cône convexe. On obtient alors $A_{Q_{max},g,l} + C^\star = \bigcap_{w\in\prod_\alpha \mathfrak{S}_d}(\vec{\rho}_w + D_w + C^\star)$. Ainsi il suffit de montrer que $A_{Q,g,l}$ est inclus dans $\vec{\rho}_w + D_w + C^\star$ pour tout w. Pour cela on interprète les ensembles $\vec{\rho}_w + D_w + C^\star$ comme des $A_{Q_w,g,l}$ pour des cônes convexes Q_w bien choisis. Il faut ensuite montrer que les Q_w sont inclus dans Q.

On commence par rappeler comment écrire $A_{Q_{max},g,l}$ sous la forme $\vec{\rho}_w + D_w$ au voisinage de $\vec{\rho}_w$.

4.3.1 Convexes polyèdriques au voisinage d'un point

Lemme 4.3.2. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(f_j)_{j\in J}$ une famille finie de formes linéaires sur $\mathcal{E}$. Soient $(a_j)_j \in \mathbb{R}^J$. On considère le convexe*

$$P = \bigcap_{j\in J}\{f_j \geqslant a_j\}.$$

Alors si $\rho \in P$, il existe un unique cône convexe D_ρ tel qu'il existe un voisinage de $\mathcal{V}$ de ρ dans $\mathcal{E}$ tel que $P\cap\mathcal{V} = (\rho + D_\rho)\cap\mathcal{V}$.
De plus si $\Lambda = \{j\in J\ ;\ f_j(\rho) = a_j\}$ on a $D_\rho = \bigcap_{j\in\Lambda}\{f_j \geqslant 0\}$.

Démonstration. Soit $\rho \in P$, Λ comme dans l'énoncé et $D = \bigcap_{j\in\Lambda}\{f_j \geqslant 0\}$.
Alors si $\mathcal{V}$ est un voisinage de ρ, on a bien $P \cap \mathcal{V} \subseteq (\rho + D) \cap \mathcal{V}$. Maintenant en prenant $\mathcal{V} = \bigcap_{j\in J\setminus\Lambda} f_j^{-1}(]a_j, +\infty[)$ qui est bien un voisinage de ρ, si $x \in (\rho + D) \cap \mathcal{V}$ on a pour $j \in J$, soit $j \in \Lambda$ et alors $f_j(x) = f_j(x-\rho) + f_j(\rho) \geqslant a_j$, soit $j \notin \Lambda$ et alors $f_j(x) > a_j$.

On a montré l'existence et la forme de D. Pour l'unicité, si D et D' sont commes dans l'énoncé, le fait que $\rho + D$ et $\rho + D'$ coïncident au voisinage de ρ entraîne $D = D'$. □

Proposition 4.3.3. *On reprend les notations du lemme 4.3.2 précédent. On suppose que le convexe $P = \bigcap_{j\in J}\{f_j \geqslant a_j\}$ est non vide et ne contient pas de droite affine. Pour tout $\rho \in Ext(P)$, on note D_ρ le cône convexe tel que $P = \rho + D_\rho$ au voisinage de ρ.*
Alors $P = \bigcap_{\rho\in Ext(P)}(\rho + D_\rho)$.

Démonstration. Notons d'abord que P possède un nombre fini de ponts extrémaux (on a J fini) et au moins un : on a (voir par exemple [Grü] 2.5.6) $P = Conv(Ext(P)) + cc(P)$ où $Conv(Ext(P))$ est l'enveloppe convexe de $Ext(P)$, et $cc(P)$ est le cône caractéristique de P. Le cône caractéristique de P est défini comme $cc_x(P) = \{y \in \mathcal{E} \ ; \ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+, x + \lambda y \in P\}$ pour n'importe quel point x de P. On a $P \neq \emptyset$ donc $Ext(P) \neq \emptyset$.

Supposons d'abord que pour tout $j \in J$, il existe $\rho \in Ext(P)$ tel que $f_j(\rho) = a_j$. Alors par le lemme 4.3.2 précédent pour $\rho \in Ext(P)$ on a $D_\rho = \bigcap_{j,f_j(\rho)=a_j}\{f_j \geqslant 0\}$ donc $\rho + D_\rho = \bigcap_{j,f_j(\rho)=a_j}\{f_j \geqslant a_j\}$. D'où $\bigcap_{\rho\in Ext(P)}(\rho + D_\rho) = \bigcap_{j\in J}\{f_j \geqslant a_j\} = P$.

Montrons enfin que quitte à les modifier, on peut demander la condition sur les a_j. Soit $J' = \{j \in J \ ; \ \exists\rho \in Ext(P), f_j(\rho) = a_j\}$. Si $J' \neq J$, on pose pour $j \notin J'$, $b_j = \min_{\rho\in Ext(P)} f_j(\rho)$. Alors $P = (\bigcap_{j\in J'}\{f_j \geqslant a_j\})\bigcap(\bigcap_{j\notin J'}\{f_j \geqslant b_j\})$. En effet une inclusion est claire. Pour l'autre, soit $x = \sum_\rho \lambda_\rho.\rho + y \in P = Conv(Ext(P)) + cc(P)$, avec les $\lambda_\rho \geqslant 0$, de somme 1.
Soit $j \notin J'$. On a $\sum_\rho \lambda_\rho.\rho + \mathbb{R}_+.y \subseteq \{f_j \geqslant a_j\}$ donc $f_j(y) \geqslant 0$. Ainsi $f_j(x) \geqslant \sum_\rho \lambda_\rho.b_j = b_j$.
On obtient l'inclusion réciproque. □

On peut maintenant définir les D_w annoncés.

Définition 4.3.4. *Soit $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d+1)$. On sait par le théorème 4.2.6 que les points extrémaux de $A_{Q_{max},g,l}$ sont indexés par les $w \in \prod_{\alpha\in S}\mathfrak{S}_d$.*
On note alors D_w l'unique cône convexe (voir 4.3.2) de $\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$ tel que $A_{Q_{max},g,l} = \vec{\rho}_w + D_w$ au voisinage de $\vec{\rho}_w$.

Remarque 4.3.5. On peut décrire précisément le cône convexe D_w : la preuve du théorème 4.2.6, les lemmes 4.2.10 et 4.3.2 entraînent

$$D_w = \{\mathscr{F}_+ \geqslant 0\} \bigcap \left(\bigcap_{\alpha\in S} \bigcap_{s=0}^{d} \left\{ \vec{\mathscr{F}}^{\alpha}_{T^{\alpha}_s(w)} \geqslant 0 \right\} \right).$$

On a encore $A_{Q_{max},g,l} + C^\star = \vec{\rho}_w + D_w + C^\star$ au voisinage de $\vec{\rho}_w$.

Il s'agit dans la sous-section suivante d'interpréter les ensembles $\vec{\rho}_w + D_w + C^\star$ comme des $A_{Q_w,g,l}$ pour certains cônes convexes Q_w.

4.3.2 Les cônes convexes Q_w

Commençons par écrire les ensembles $\vec{\rho}_w + D_w$ comme des $A_{Q'_w,g,l}$. Les cônes convexes Q_w cherchés se déduiront des Q'_w.

Dans toute cette sous-section on se fixe $w = (w_\alpha) \in \prod_{\alpha \in S} \mathfrak{S}_d$. On avait déjà associé à un tel w, dans la preuve du théorème 4.2.6, l'élément $w^* \in \prod_{\alpha \in S} \mathfrak{S}_d$ donné par $w^*_\alpha(j) = d+1-w_\alpha^{-1}(j)$ et les parties $T_j^\alpha(w) = w^*_\alpha(\llbracket 1, j \rrbracket)$ de $\llbracket 1, d \rrbracket$. Dans la preuve en question ces objets étaient reliés au point extrémal $\vec{\rho}_w$ de $A_{Q_{max},g,l}$. Ces mêmes objets vont nous servir à définir les Q'_w.

Les fonctions ord_w^α associées à w

Par convention on pose $T_0^\alpha(w) = \emptyset$. Les parties $T_s^\alpha(w)$ correspondent (voir le lemme 4.1.7) à des parties admissibles $I_s^\alpha(w)$ de $I = \{(i,j) \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d\}$ données par

$$I_s^\alpha(w) = \bigcup_{i=1}^{s} \{i\} \times \llbracket d+1-t_i, d \rrbracket$$

où on a noté $T_s^\alpha(w) = \{t_1 > \cdots > t_s\}$. En particulier $\#\left(I_s^\alpha(w)\right) = \sum_{t \in T_s^\alpha(w)} t = \sum_{i=1}^{s} w^*_\alpha(i)$.

On a $I_0^\alpha(w) = \emptyset$, $I_d^\alpha(w) = I$ ainsi que les inclusions $I_s^\alpha(w) \subseteq I_{s+1}^\alpha(w)$ pour $0 \leqslant s < d$. On obtient $\#\left(I_s^\alpha(w) \backslash I_{s-1}^\alpha(w)\right) = w^*_\alpha(s)$.

On définit les fonctions

$$\begin{array}{rccl} ord_w^\alpha : & I & \to & \llbracket 1, d \rrbracket \\ & (i,j) & \mapsto & \min\{s \ ; \ (i,j) \in I_s^\alpha(w)\} \end{array}$$

ainsi on a $I_s^\alpha(w) = \{x \in I \ ; \ ord_w^\alpha(x) \leqslant s\}$ et $I_s^\alpha(w) \backslash I_{s-1}^\alpha(w) = \{ord_w^\alpha = s\}$.

Remarque 4.3.6. Représentons graphiquement la fonction ord_w^α pour un α fixé : en travaillant un peu on montre que pour $s \in \llbracket 1, d \rrbracket$ on a une bijection

$$\begin{array}{ccl} \llbracket d+1-w^*_\alpha(s), d \rrbracket & \longrightarrow & I_s^\alpha(w) \backslash I_{s-1}^\alpha(w) \\ j & \longmapsto & \left(\max\left\{i' \in \llbracket 1, j \rrbracket \ ; \ i' = 1 \text{ ou } (i'-1, j) \in I_{s-1}^\alpha(w)\right\}, j\right). \end{array}$$

Ainsi pour placer les valeurs de ord_w^α dans un tableau triangulaire supérieur, en plaçant $ord_w^\alpha(i,j)$ dans la case de coordonnées (i,j), on suit la méthode suivante : on place d'abord, sur la ligne d'indice 1, le nombre 1 dans les $w^*_\alpha(1)$ dernières colonnes du tableau. Ensuite on place le nombre 2 dans les $w^*_\alpha(2)$ dernières colonnes, à chaque fois le plus haut possible, puis le nombre 3 dans les $w^*_\alpha(3)$ dernières colonnes, à chaque fois le plus haut possible, etc ... Dans la figure 4.1 on a dessiné le cas $w_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

j →, i ↓

5	3	1	1	1
	5	3	3	2
		5	4	3
			5	4
				5

FIGURE 4.1 – La fonction ord_w^α pour $w_\alpha = (5\ 3\ 1\ 4\ 2)$.

Les convexes Q'_w

Soit G_w le graphe fini orienté dont l'ensemble des sommets est $S \times I$ et pour $(\alpha, x), (\alpha', x') \in S \times I$, l'ensemble des arêtes de (α, x) à (α', x') est $\{*\}$ si $\alpha = \alpha'$ et $ord_w^\alpha(x) \geqslant ord_w^\alpha(x')$, et $\emptyset$ sinon. On note alors Q'_w le cône convexe associé à G_w (voir la définition 4.1.3) :

$$Q'_w = \{(q_{i,j}^\alpha) \in \mathbb{R}^{S\times I} \ ; \ \forall \alpha \in S, \forall x, x' \in I, q_x^\alpha \leqslant q_{x'}^\alpha \text{ si } ord_w^\alpha(x) \leqslant ord_w^\alpha(x')\}.$$

Remarque 4.3.7. Le convexe Q qui nous occupe est défini (proposition 3.1.14) par les trois jeux d'inégalités

(I) $q_{i,j+1}^\alpha \leqslant q_{i,j}^\alpha$

(II) $q_{i,j}^\alpha \leqslant q_{i+1,j+1}^\alpha$

(III) $bq_{j+1,j+1}^\alpha - q_{j+1,d}^{F\circ\alpha} + b\sum_{s=i+1}^{j}(q_{s,j+1}^\alpha - q_{s,j}^\alpha) \leqslant bq_{j,j}^\alpha - q_{j,d}^{F\circ\alpha} + b\sum_{s=i}^{j-1}(q_{s,j}^\alpha - q_{s,j-1}^\alpha)$.

Il est donc clair qu'un élément de Q'_w vérifie les inégalités (I) et (II) : les $I_s^\alpha(w)$ sont admissibles ce qui entraîne $ord_w^\alpha(i, j+1) \leqslant ord_w^\alpha(i,j)$ et $ord_w^\alpha(i,j) \leqslant ord_w^\alpha(i+1, j+1)$. Certaines de ces inégalités sont des égalités.

Proposition 4.3.8. *On prend* $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d+1)$. *Alors pour tout* $w \in \prod_\alpha \mathfrak{S}_d$ *on a* $A_{Q'_w,g,l} = \vec{\rho}_w + D_w$.

Démonstration. Les parties admissibles (de l'ensemble des sommets) de G_w (voir la définition 4.1.3) sont les parties de $S \times I$ de la forme

$$\bigcup_\alpha \left(\{\alpha\} \times I_{s_\alpha}^\alpha(w)\right)$$

pour $(s_\alpha)_\alpha \in [\![0, d]\!]^S$. Donc l'application de la proposition 4.1.4 donne

$$\begin{aligned} (Q'_w)^\star &= \left\{ (q_{i,j}^\alpha) \ ; \sum_{(\alpha,(i,j)) \in S\times I} q_{i,j}^\alpha = 0 \text{ et } \forall \alpha \in S, \forall s \in [\![0,d]\!], \sum_{(i,j)\in I_s^\alpha(w)} q_{i,j}^\alpha \leqslant 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{S\times I} \ ; \ \mathscr{S}(x) = 0 \text{ et } \forall \alpha \in S, \forall s \in [\![0,d]\!], \mathscr{S}_{I_s^\alpha(w)}^\alpha(x) \leqslant 0 \right\} \end{aligned}$$

les fonctions $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}_*^*$ étant définies en 4.1.8. Donc

$$\begin{aligned} A_{Q'_w,g,l} &= \left\{ (y_j^\alpha) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]} \ ; \ \sum_{\alpha,j} y_j^\alpha.\vec{\mu}_j^\alpha - \vec{l} \in (Q'_w)^\star \right\} \\ &= \left\{ (y_j^\alpha) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]} \ ; \ \sum_{\alpha,j} y_j^\alpha = 0 \text{ et } \forall \alpha' \in S, \forall s \in [\![0,d]\!], \mathscr{F}_{T_s^{\alpha'}(w)}^{\alpha'}((y_j^\alpha)) \geqslant 0 \right\}. \end{aligned}$$

D'autre part on sait (voir la remarque 4.3.5) que

$$D_w = \{\mathscr{F}_+ \geqslant 0\} \bigcap \left(\bigcap_{\alpha\in S} \bigcap_{s=0}^{d} \left\{ \vec{\mathscr{F}}_{T_s^\alpha(w)}^\alpha \geqslant 0 \right\} \right) = \{\mathscr{F}_+ = 0\} \bigcap \left(\bigcap_{\alpha\in S} \bigcap_{s=0}^{d} \left\{ \vec{\mathscr{F}}_{T_s^\alpha(w)}^\alpha \geqslant 0 \right\} \right).$$

On obtient $A_{Q'_w,g,l} = \vec{\rho}_w + D_w$. □

Le passage des Q'_w aux cônes convexes Q_w

On vient de montrer (proposition 4.3.8) que $A_{Q'_w,g,l} = \vec{\rho}_w + D_w$. Mais c'est $\vec{\rho}_w + D_w + C^\star$ que l'on souhaite interpréter comme un $A_{P,g,l}$ pour un cône convexe P.

Définition 4.3.9. *On définit le cône convexe*

$$D = \left\{ (q^\alpha_{i,j}) \in \mathbb{R}^{S\times I} \; ; \; \begin{array}{l} \text{pour tout } \alpha \in S, \mu^\alpha_{1,1} \geqslant \cdots \geqslant \mu^\alpha_{1,d} \text{ où} \\ \text{les } \mu^\alpha_{1,j} \text{ sont définis à partir des } q^\alpha_{i,j} \\ \text{par les relations (3.6) habituelles} \end{array} \right\}$$

et (pour $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d+1)$ et) pour $w \in \prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d$ on pose $Q_w = Q'_w \cap D$.

Remarque 4.3.10. Par définition des $\vec{\mu}^\alpha_j$ (voir l'introduction de la section 4.1) on a $D = \{x \in \mathbb{R}^{S\times I} \; ; \; \forall \alpha \in S, \forall j \in [\![1, d-1]\!], \langle x|\vec{\mu}^\alpha_j\rangle \geqslant \langle x, \vec{\mu}^\alpha_{j+1}\rangle\}$. Ainsi $D^\star$ est le cône convexe engendré par les vecteurs $\vec{\mu}^\alpha_j - \vec{\mu}^\alpha_{j+1}$.

Proposition 4.3.11. *On suppose $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d+1)$. Alors $A_{Q_w,g,l} = \vec{\rho}_w + D_w + C^\star$.*

Démonstration. D'après la proposition 4.3.8) on a $A_{Q'_w,g,l} = \vec{\rho}_w + D_w$, il suffit donc de montrer que $A_{Q_w,g,l} = A_{Q'_w,g,l} + C^\star$.
Si $y = (y^\alpha_j) \in A_{Q'_w,g,l}$ et $z = (z^\alpha_j) \in C^\star$ on écrit

$$\sum_{\alpha,j} (y^\alpha_j + z^\alpha_j).\vec{\mu}^\alpha_j - \vec{l} = \sum_{\alpha,j} y^\alpha_j.\vec{\mu}^\alpha_j - \vec{l} + \sum_{\alpha,j} z^\alpha_j.\vec{\mu}^\alpha_j$$

et le premier terme de la somme du membre de droite est dans $(Q'_w)^\star$. Montrons que le second terme est dans $D^\star$: si $t \in D$, on a $g(t) = (\langle t, \vec{\mu}^\alpha_j\rangle) \in C$ (par définition de D et C) donc $\langle \sum_{\alpha,j} z^\alpha_j.\vec{\mu}^\alpha_j, t\rangle = \sum_{\alpha,j} z^\alpha_j.\langle \vec{\mu}^\alpha_j, t\rangle = \langle z, g(t)\rangle \geqslant 0$. On a montré $A_{Q_w,g,l} \supseteq A_{Q'_w,g,l} + C^\star$.

Pour l'inclusion réciproque prenons $y = (y^\alpha_j) \in A_{Q_w,g,l}$. Considérons encore $t = (t^\alpha_{i,j}) \in D^\star$ tel que $\sum_{\alpha,j} y^\alpha_j.\vec{\mu}^\alpha_j - \vec{l} - t \in (Q'_w)^\star$, un tel t existe car $Q^\star_w = (Q'_w)^\star + D^\star$. On a vu dans la remarque 4.3.10 que $D^\star$ est engendré par la famille $(\vec{\mu}^\alpha_j - \vec{\mu}^\alpha_{j+1})_{\alpha\in S,\ 1\leqslant j\leqslant d-1}$ donc t est de la forme $\sum_{\alpha,j} \beta^\alpha_j(\vec{\mu}^\alpha_j - \vec{\mu}^\alpha_{j+1})$ pour des $\beta^\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. D'où $t = \sum_\alpha \sum_{j=1}^d (\beta^\alpha_j - \beta^\alpha_{j+1}).\vec{\mu}^\alpha_j$ où on a posé $\beta^\alpha_0 = \beta^\alpha_d$. Si $z = (z^\alpha_j)$ avec $z^\alpha_j = \beta^\alpha_j - \beta^\alpha_{j+1}$, on a $y - z \in A_{Q'_w,g,l}$. Il suffit donc de montrer $z \in C^\star$. Or si $v = (v^\alpha_j) \in C$ on a

$$\langle z, v\rangle = \sum_{\alpha,j} z^\alpha_j v^\alpha_j = \sum_\alpha \sum_{j=1}^{d-1} \beta^\alpha_j.(v^\alpha_j - v^\alpha_{j-1}) \geqslant 0.$$

On a montré $A_{Q_w,g,l} \subseteq A_{Q'_w,g,l} + C^\star$. □

4.3.3 Les Q_w sont inclus dans Q

Avant de donner la preuve du théorème 4.3.1, il reste à vérifier que les Q_w sont inclus dans Q. Chaque cône convexe Q'_w est inclus dans Q_w donc d'après la remarque 4.3.7, seul le jeu d'inégalités (III) de la définition de Q reste à vérifier. Pour cela on raisonne par récurrence sur d. Ainsi si $w = (w_\alpha) \in \prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d$, il correspond à w une famille (indéxée par S) de tableaux triangulaires comme dans la figure 4.1. Pour avoir le pas de récurrence, il s'agit de définir un élément de $\prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_{d-1}$ correspondant à la famille des tableaux auxquels on retire la première ligne (et auxquels on retire 1 à chaque case). C'est l'objet de la sous-section suivante.

La permutation des perdants

La terminologie de permutation des perdants vient de [Car].

Définition 4.3.12. *Soit* $\omega \in \mathfrak{S}_d$.
Pour $i \in [\![1, d]\!]$, *on dit que* $\omega(i)$ *est un record de* ω, *atteint en position* i, *si* $\omega(j) < \omega(i)$ *pour tout* $j < i$.
La permutation des perdants de ω *est la permutation* $\omega' \in \mathfrak{S}_{d-1}$ *définie par récurrence par* $\omega'(i) = \min\left(\omega([\![1, i+1]\!]) \backslash \omega'([\![1, i-1]\!])\right)$.

Si $d \geqslant 2$ on montre par récurrence sur i que

$$\omega([\![1, i+1]\!]) \backslash \omega'([\![1, i-1]\!]) = \{\omega(i+1), \text{dernier record de } \omega \text{ apparaissant au plus en } i\}.$$

On a le lemme suivant (on rappelle que si $\omega \in \mathfrak{S}_d$ est une permutation, ω^* est la permutation définie par $\omega^*(i) = d + 1 - \omega^{-1}(i)$).

Lemme 4.3.13. *On suppose* $d \geqslant 2$. *Soient* $w = (w_\alpha) \in \prod_{\alpha \in S} \mathfrak{S}_d$ *et* $\omega = (\omega_\alpha) \in \prod_{\alpha \in S} \mathfrak{S}_{d-1}$ *tels que pour tout* α, $\omega_\alpha^* = (w_\alpha^*)'$.
Alors pour tous α *et* $(i, j) \in I' = \{(s, t) \in [\![1, d-1]\!]\ ;\ s \leqslant t\}$ *on a* $ord_\omega^\alpha(i, j) = ord_w^\alpha(i+1, j+1) - 1$.

Démonstration. Le lemme se démontre « α par α », on omet donc les indices α. Soit $s \geqslant 2$, on note $w^* = \{t'_1 > \cdots > t'_s\}$. Soit $i_0 \in [\![1, s]\!]$ tel que $t'_{i_0} = w^*(s)$. On a

$$I_s(w) \backslash I_{s-1}(w) = \bigsqcup_{i=i_0}^{s} \{i\} \times [\![d + 1 - t'_i, d - t'_{i+1}]\!]$$

avec $t'_{s+1} = 0$.

Si $w^*(s)$ n'est pas un record, on a $i_0 > 1$ et $(w^*)'(s-1) = w^*(s)$ donc

$$\#\{j \in [\![1, d]\!]\ ;\ ord_w(1, j) = s\} = 0 = w^*(s) - (w^*)'(s-1).$$

Sinon $w^*(s)$ est un record donc $i_0 = 1$ et $(w^*)'(s-1)$ est le dernier record de w^* avant $s - 1$, donc vaut $\max(w^*([\![1, s-1]\!]))$ et

$$\#\{j \in [\![1, d]\!]\ ;\ ord_w(1, j) = s\} = t'_{i_0} - t'_{i_0+1} = w^*(s) - (w^*)'(s-1).$$

Dans les deux cas on a $\#\{j \in [\![1, d]\!]\ ;\ ord_w(1, j) = s\} = w^*(s) - (w^*)'(s-1)$ donc $\#\{(i, j) \in I\ ;\ ord_w(i, j) = s \text{ et } i \geqslant 2\} = (w^*)'(s-1)$ *i.e.*

$$\#\{(i, j) \in I'\ ;\ ord_w(i+1, j+1) - 1 = s - 1\} = (w^*)'(s-1).$$

Or si f est la fonction $I' \to [\![1, d-1]\!], (i, j) \mapsto ord_w(i+1, j+1) - 1$, il est clair que pour remplir les cases du tableau indexées par I', on met d'abord $\#\{f = 1\} = (w^*)'(1)$ fois le nombre 1 sur la première ligne dans les $(w^*)'(1)$ dernières colonnes, puis $(w^*)'(2)$ fois le nombre 2 sur les $(w^*)'(2)$ dernières colonnes le plus haut possible, etc ... (voir la remarque 4.3.6). Ainsi on a $f = ord_\omega$. $\square$

Les inclusions $Q_w \subseteq Q$

On peut maintenant utiliser la notion de permutation des perdants pour démontrer les inclusions des Q_w dans Q.

Définition 4.3.14. *Si $\omega \in \mathfrak{S}_d$, on pose $P^1(\omega) = \omega^*$ et pour $i \in [\![1, d-1]\!]$, $P^{i+1}(\omega) = (P^i(\omega))'$. Ainsi pour tout i on a $P^i(\omega) \in \mathfrak{S}_{d+1-i}$.*

Proposition 4.3.15. *Soit $w = (w_\alpha) \in \prod_{\alpha \in S} \mathfrak{S}_d$. On prend $q = (q^\alpha_{i,j}) \in Q_w = Q'_w \cap D$. Pour $\alpha \in S$, soient $q^\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant q^\alpha_d$ tels que pour tout $(i,j) \in I$, $q^\alpha_{i,j} = q^\alpha_{ord^\alpha_w(i,j)}$. On considère les $\mu^\alpha_{i,j}$ associés par les relations (3.6) aux $q^\alpha_{i,j}$.*
Alors pour tous $\alpha \in S$ et $(i,j) \in I$ on a

$$\mu^\alpha_{i,j} = b.q^\alpha_{(P^i(w_\alpha))^{-1}(d+1-j)+i-1} - q^{F\circ\alpha}_j.$$

Démonstration. Montrons d'abord la formule pour $i = 1$. On a

$$\begin{aligned}\mu^\alpha_{1,j} &= b.q^\alpha_{j,j} - q^\alpha_{j,d} + b.\sum_{s=1}^{j-1}(q^\alpha_{s,j} - q^\alpha_{s,j-1}) \\ &= -q^{F\circ\alpha}_j + b.\left(\sum_{s=1}^{j} q^\alpha_{ord^\alpha_w(s,j)} - \sum_{s=1}^{j-1} q^\alpha_{ord^\alpha_w(s,j-1)}\right)\end{aligned}$$

or on montre que $\{ord^\alpha_w(s,j)\ ;\ 1 \leqslant s \leqslant j\} = \{s' \in [\![1,d]\!]\ ;\ w^*_\alpha(s') \geqslant d+1-j\}$ qui est de cardinal j. De même, $\{ord^\alpha_w(s,j-1)\ ;\ 1 \leqslant s \leqslant j-1\} = \{s' \in [\![1,d]\!]\ ;\ w^*_\alpha(s') \geqslant d+2-j\}$. Ainsi si $j \geqslant 2$, la différence de ces deux ensembles est $\{(w^*)^{-1}(d+1-j)\}$. Donc (y compris si $j = 1$)

$$\mu^\alpha_{1,j} = b.q^\alpha_{(P^1(w_\alpha))^{-1}(d+1-j)+1-1} - q^{F\circ\alpha}_j.$$

On fait alors un raisonnement par récurrence : supposons la formule démontrée pour $i = 1, \ldots, r$ avec $r \leqslant d-1$, et montrons là pour $i = r+1$. On définit $q' = (q'^\alpha_{i,j}) \in \mathbb{R}^{S\times I'}$ où $I' = \{(i,j)\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d-1\}$ par $q'^\alpha_{i,j} = q^\alpha_{i+1,j+1}$. Soit $\omega = (\omega_\alpha) \in \prod_\alpha \mathfrak{S}_{d-1}$ tel que $\omega^*_\alpha = (w^*_\alpha)'$. Alors par le lemme 4.3.13 on a $q' \in Q'_\omega$, avec des notations évidentes. On note $\mu'^\alpha_{i,j}$ les « $\mu^\alpha_{i,j}$ »associés à q', et $q'^\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant q'^\alpha_{d-1}$ les réels tels que $q'^\alpha_{i,j} = q'^\alpha_{ord^\alpha_w(i,j)}$.
Ainsi pour $s \in [\![1, d-1]\!]$ on a $\mu'^\alpha_{i,j} = \mu^\alpha_{i+1,j+1}$ et $q'^\alpha_s = q^\alpha_{s+1}$.

Par l'hypothèse de récurrence on a si $r+1 \leqslant j \leqslant d$,

$$\begin{aligned}\mu^\alpha_{r+1,j} &= \mu'^\alpha_{r,j-1} \\ &= b.q'^\alpha_{(P^r(\omega_\alpha))^{-1}((d-1)+1-(j-1))+r-1} - q'^{F\circ\alpha}_{j-1} \\ &= b.q^\alpha_{(P^r(\omega_\alpha))^{-1}(d+1-j)+r} - q'^{F\circ\alpha}_j \\ &= b.q^\alpha_{(P^{r+1}(w_\alpha))^{-1}(d+1-j)+(r+1)-1} - q'^{F\circ\alpha}_j\end{aligned}$$

ce qui est la formule demandée pour $i = r+1$. □

Corollaire 4.3.16. *On suppose $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d+1)$.*
Si $w \in \prod_{\alpha \in S} \mathfrak{S}_d$, on a $Q_w \subseteq Q$.

Démonstration. Soit $q = (q^\alpha_{i,j}) \in Q_w$. On a $Q_w = Q'_w \cap D$. Or les éléments de Q'_w vérifient les jeux d'inégalités (I) et (II) de la définition de Q (voir la remarque 4.3.7). Il reste donc à vérifier le jeu (III) d'inégalités pour q. Le jeu (III) est

$$bq^\alpha_{j+1,j+1} - q^{F\circ\alpha}_{j+1,d} + b\sum_{s=i+1}^{j}(q^\alpha_{s,j+1} - q^\alpha_{s,j}) \leqslant bq^\alpha_{j,j} - q^{F\circ\alpha}_{j,d} + b\sum_{s=i}^{j-1}(q^\alpha_{s,j} - q^\alpha_{s,j-1})$$

c'est à dire $\mu^\alpha_{i+1,j+1} \leqslant \mu^\alpha_{i,j}$ où les $\mu^\alpha_{i,j}$ sont définis par les relations (3.6).
On fait un raisonnement par récurrence comme dans la preuve de la proposition 4.3.15. On reprend les notations de cette proposition. Montrons d'abord que si $j \in [\![1, d-1]\!]$ et $\alpha \in S$, on a $\mu^\alpha_{1,j} \geqslant \mu^\alpha_{2,j+1}$.

On a
$$\mu^\alpha_{1,j} - \mu^\alpha_{2,j+1} = b.\left(q^\alpha_{(P^1(w_\alpha))^{-1}(d+1-j)} - q^\alpha_{(P^2(w_\alpha))^{-1}(d-j)+1}\right) + q^{F\circ\alpha}_{j+1} - q^{F\circ\alpha}_j.$$
Le second terme du membre de droite est positif. On a deux possibilités : si $(P^1(w_\alpha))^{-1}(d+1-j) > (P^2(w_\alpha))^{-1}(d-j)$ on a bien $\mu^\alpha_{1,j} \geqslant \mu^\alpha_{2,j+1}$.
Sinon $(P^1(w_\alpha))^{-1}(d+1-j) \leqslant (P^2(w_\alpha))^{-1}(d-j)$. On va montrer que dans ce second cas on a $\mu^\alpha_{1,j+1} = \mu^\alpha_{2,j+1}$. Notons $i_1 = (P^1(w_\alpha))^{-1}(d+1-j)$ et $i_2 = (P^2(w_\alpha))^{-1}(d-j)$. On a donc $i_1 \leqslant i_2$, $w^*_\alpha(i_1) = d+1-j$ et $(w^*_\alpha)'(i_2) = d-j$. Ainsi
$$d-j = \min\{w^*_\alpha(i_2+1), \text{dernier record de } w^*_\alpha \text{ avant } i_2\} = \{w^*_\alpha(i_2+1), \max(w^*_\alpha[\![1,i_2]\!])\}.$$
Or $\max(w^*_\alpha[\![1,i_2]\!]) \geqslant w^*_\alpha(i_1) = d+1-j$, donc $d-j = w^*_\alpha(i_2+1)$, *i.e.* $(w^*_\alpha)^{-1}(d-j) = (P^2(w_\alpha))^{-1}(d-j)+1$. D'où
$$\begin{aligned}\mu^\alpha_{1,j+1} &= b.q^\alpha_{(P^1(w_\alpha))^{-1}(d-j)} - q^{F\circ\alpha}_{j+1}\\ &= b.q^\alpha_{(P^2(w_\alpha))^{-1}(d-j)+1} - q^{F\circ\alpha}_{j+1}\\ &= \mu^\alpha_{2,j+1}.\end{aligned}$$
On a bien à nouveau $\mu^\alpha_{1,j} \geqslant \mu^\alpha_{2,j+1}$ puisque par hypothèse q est dans D.

On termine la démonstration par l'étape de récurrence, qui se fait comme dans la preuve de la proposition 4.3.15. □

4.3.4 La démonstration de l'égalité $A_{Q,g,l} = A_{Q_{max},g,l} + C^\star$

On peut maintenant démontrer le théorème 4.3.1.

Démonstration. On suit la stratégie annoncée au début de la section. Montrons d'abord que $A_{Q_{max},g,l} + C^\star \subseteq A_{Q,g,l}$.

On a $Q^\star_{max} \subseteq Q^\star$ donc $A_{Q_{max},g,l} \subseteq A_{Q,g,l}$. Il suffit donc de montrer que $A_{Q,g,l} + C^\star \subseteq A_{Q,g,l}$: soient $y = (y^\alpha_j) \in A_{Q,g,l}$ et $z = (z^\alpha_j) \in C^\star$. Soit également $q \in Q$. On sait que les $\mu^\alpha_{i,j}$ associés à q vérifient $\mu^\alpha_{1,1} \geqslant \cdots \geqslant \mu^\alpha_{1,d}$, *i.e.* $\langle q, \vec{\mu}^\alpha_{1,1}\rangle \geqslant \cdots \geqslant \langle q, \vec{\mu}^\alpha_{1,d}\rangle$ ou encore $(\langle q, \vec{\mu}^\alpha_j\rangle) \in C$. Ainsi $\sum_{\alpha,j} z^\alpha_j.\langle \vec{\mu}^\alpha_j, q\rangle \geqslant 0$. Mais d'autre part $\sum_{\alpha,j} y^\alpha_j.\vec{\mu}^\alpha_j - \vec{l} \in Q^\star$, donc $\sum_{\alpha,j} y^\alpha_j.\langle \vec{\mu}^\alpha_j, q\rangle \geqslant \langle \vec{l}, q\rangle$. D'où $\sum_{\alpha,j}(y^\alpha_j + z^\alpha_j).\langle \vec{\mu}^\alpha_j, q\rangle \geqslant \langle \vec{l}, q\rangle$, pour tout $q \in Q$. Donc $y + z \in A_{Q,g,l}$.

Il s'agit maintenant de montrer l'inclusion réciproque $A_{Q_{max},g,l} + C^\star \supseteq A_{Q,g,l}$. Or la proposition 4.3.3 s'applique car le convexe $A_{Q_{max},g,l}$ est compact (par le lemme 4.2.7) et le cône $C^\star$ ne contient pas de droite affine. À l'aide de la remarque 4.3.5 on obtient
$$A_{Q_{max},g,l} + C^\star = \bigcap_{\vec{\rho}_w \in Ext(A_{Q_{max},g,l}+C^\star)} (\vec{\rho}_w + D_w + C^\star)$$
donc il suffit de vérifier que pour $\vec{\rho}_w \in Ext(A_{Q_{max},g,l}+C^\star)$ on a $A_{Q,g,l} \subseteq \vec{\rho}_w + D_w + C^\star$ (en fait on montre que cette inclusion est vérifiée pour tous les $\vec{\rho}_w$, pas seulement ceux qui sont dans $Ext(A_{Q_{max},g,l} + C^\star)$). Soit donc $w \in \prod_{\alpha\in S}\mathfrak{S}_d$. La proposition 4.3.11 nous permet d'écrire $\vec{\rho}_w + D_w + C^\star = A_{Q_w,g,l}$ pour un cône convexe Q_w. Le corollaire 4.3.16 assure que Q_w est inclus dans Q, donc que $A_{Q,g,l}$ est inclus dans $A_{Q_w,g,l}$. On a obtenu l'inclusion réciproque. □

4.4 L'encadrement pour les variétés $\mathcal{X}_\mu$

On termine en donnant les encadrements obtenus, pour $\dim(\mathcal{X}_\mu)$ d'abord puis pour $\dim(\mathcal{X}_{\leqslant\mu})$ dans la sous-section suivante.

Lemme 4.4.1. *Il existe un point $q = (q^\alpha_{i,j})$ du convexe Q tel que les inégalités des jeux (I) (II) et (III) définissant Q soient strictes pour q.*

Démonstration. Il est facile de dessiner une donnée combinatoire qui convient, puis d'en tirer une formule pour un point q comme dans l'énoncé. Ainsi on peut poser par exemple pour tous $\alpha \in S$ et $(i,j) \in I$, $q^\alpha_{i,j} = (d-j)(1-\frac{2}{b}) + i$. On vérifie que les $\mu^\alpha_{i,j}$ associés par les relations (3.6) sont donnés par $\mu^\alpha_{i,j} = (d+i)(b-\frac{1}{2}) - bj$. Donc $q^\alpha_{i,j} - q^\alpha_{i,j+1} = 1 - \frac{1}{2b}$, $q^\alpha_{i,j} - q^\alpha_{i,j+1} = \frac{1}{2b}$ et $\mu^\alpha_{i,j} - \mu^\alpha_{i+1,j+1} = \frac{1}{2}$ et toutes les inégalités sont strictes. □

Dans la définition suivante la terminologie vient de [Car].

Définition 4.4.2. *On dit qu'un élément $(\mu^\alpha_j) \in \mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$ est b-régulier si pour tout $\alpha \in S$ et $j \in [\![1, d-1]\!]$, $\mu^{F^{-1}\circ\alpha}_j - \mu^{F^{-1}\circ\alpha}_{j+1} \leqslant b(\mu^\alpha_{d-j} - \mu^\alpha_{d-j+1})$.*
On note Reg le cône convexe des éléments b-réguliers de $\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$.
On note ω_0 la permutation de $\mathfrak{S}_d$ donnée par $\omega_0(i) = d+1-i$. On pose $w_0 = (\omega_0)_\alpha \in \prod_{\alpha\in S}\mathfrak{S}_d$.

Remarque 4.4.3. Le cône Reg est inclus dans C : si $1 \leqslant j \leqslant d-1$, les nombres $t^\alpha_j = \mu^\alpha_j - \mu^\alpha_{j+1}$ vérifient pour tous $\alpha \in S$ et $j \in [\![1, d-1]\!]$, $t^\alpha_j \leqslant b.t^{F\circ\alpha}_{\omega(j)}$ où on note ω la permutation $j \mapsto \omega_0(j+1)$ de $[\![1, d-1]\!]$. En prenant r tel que $F^r \circ \alpha = \alpha$ et $\omega^r = Id$ on obtient $t^\alpha_j \leqslant b^r.t^\alpha_j$ ce qui donne $t^\alpha_j \geqslant 0$.

On a besoin d'un lemme.

Lemme 4.4.4. *On suppose $b \geqslant \max(\lfloor\frac{d^2}{4}\rfloor + 1, d+1)$.*
On a $Q'_{w_0} = Q_{w_0} = Q_{min}$ et $A_{Q_{w_0},g,l} = A_{Q_{min},g,l} = \vec{\rho}_{w_0} + Reg^\star$.

Démonstration. La première assertion vient du fait que les inégalités définissant les deux cônes convexes sont les mêmes : Q_{min} est défini (4.1.1) par les jeux

(I) $q^\alpha_{i,j+1} \leqslant q^\alpha_{i,j}$

(II') $q^\alpha_{i,j} = q^\alpha_{i+1,j+1}$.

Or ω_0 est précisément la permutation qui vérifie $\omega_0^* = Id_{[\![1,d]\!]}$, donc Q'_{w_0} est bien défini par les mêmes inégalités. On a $Q_{min} \subseteq Q$, donc $Q_{w_0} = Q'_{w_0}$. En particulier $A_{Q_{w_0},g,l} = A_{Q_{min},g,l}$.

Pour montrer la dernière égalité il suffit d'obtenir $D_{w_0} = Reg^\star$, puisqu'on a déjà $A_{Q_{w_0},g,l} = \vec{\rho}_{w_0} + D_{w_0}$ (proposition 4.3.8). Vu les inégalités définissant Reg, son dual $Reg^\star$ est engendré par les vecteurs $\vec{h}^\alpha_j = b(\vec{e}^\alpha_{d-j} - \vec{e}^\alpha_{d+1-j}) - (\vec{e}^{F^{-1}\circ\alpha}_j - \vec{e}^{F^{-1}\circ\alpha}_{j+1})$ où $(\vec{e}^\alpha_j)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$. Mais

$$D_{w_0} = \{\mathscr{F}_+ = 0\} \bigcap \left(\bigcap_{\alpha, 1\leqslant s\leqslant d} \left\{ \vec{\mathscr{F}}^\alpha_{[\![1,s]\!]} \geqslant 0 \right\} \right)$$

par la remarque 4.3.5, avec $\vec{\mathscr{F}}^{\alpha'}_{[\![1,s]\!]}(y^\alpha_j) = \sum_{j=1}^s y^{F^{-1}\circ\alpha'}_j - b\sum_{j=1}^s y^{\alpha'}_{d+1-j}$. On vérifie alors que D_{w_0} est engendré par les $\vec{h}^\alpha_j$. □

Théorème 4.4.5. *Soit $\mu = (\mu_j^\alpha) \in (\mathbb{Z}^d)^S$ dominant. On note alors $|\mu^\alpha| = \sum_{j=1}^d \mu_j^\alpha$.*
Soit (N) la condition : pour tout $\alpha \in S$, si r est le cardinal de l'orbite de α sous l'action de F, alors

$$(b^r - 1) \left| \left(\sum_{k=0}^{r-1} b^k . |\mu^{F^{-k}\circ\alpha}| \right) \right. .$$

Si μ ne satisfait pas la condition (N), la variété $\mathcal{X}_\mu$ est vide. Dans la suite du théorème on suppose (N) vérifiée.
On suppose également $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d+1)$.
Alors

(i) il existe des constantes $c_1 \in \mathbb{R}_+$ et $c_2 \in \mathbb{R}$ ne dépendant que d et b, telles que si μ vérifie $\mu_j^\alpha \geqslant \mu_{j+1}^\alpha + c_1$ pour tous $\alpha \in S$ et $j \in [\![1, d-1]\!]$,

$$\min_{w \in \prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle - \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2} - c_2 \leqslant \dim(\mathcal{X}_\mu).$$

(ii) on a

$$\dim(\mathcal{X}_\mu) \leqslant \min_{w \in \prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}.$$

De plus si μ est b-régulier on a

$$\min_{w \in \prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle = \langle \vec{\rho}_{w_0} | \mu \rangle = \frac{2}{b+1} \langle \vec{\rho} | \mu \rangle$$

où $\vec{\rho}$ est la demi-somme des racines positives de la restriction des scalaires (voir la définition 4.2.4).

Démonstration. Si $\mathcal{X}_\mu$ est non-vide, prenons $L = (L^\alpha)$ un de ses E-points. Pour $\alpha \in S$, soit g_α une matrice telle que $L^\alpha = g_\alpha . \Lambda_E$ avec $\Lambda_E = E[\![u]\!]^d$ le réseau standard de $E(\!(u)\!)^d$. Notons v_α la valuation de $det(g_\alpha)$. On a $\mathrm{div}(g_\alpha^{-1}.\sigma(g_{F^{-1}\circ\alpha})) = \mu^\alpha$ donc $-v_\alpha + b.v_{F^{-1}\circ\alpha} = |\mu^\alpha|$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{r-1} b^k . |\mu^{F^{-k}\circ\alpha}| = (b^r - 1) v_\alpha$$

et la condition (N) est vérifiée.

Par le théorème 3.3.10 on a

$$b'_{Q,g,l,0,R}(\mu) - \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2} \leqslant \dim(\mathcal{X}_\mu) \leqslant b'_{Q,g,l,0,R}(\mu) + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}.$$

Il s'agit donc d'évaluer $b'_{Q,g,l,0,R}(\mu)$.

Pour la majoration, on a $b'_{Q,g,l,0,R}(\mu) \leqslant b_{Q,g,l,0}(\mu)$. Mais μ est dans C, donc $b_{Q,g,l,0}(\mu) = b_{Q,g,l,0,C}(\mu)$ et ce nombre vaut $\inf_{z \in B_{Q,g,l,0,C}} \langle z | \mu \rangle$ par la proposition 3.3.7. Mais $B_{Q,g,l,0,C} = A_{Q,g,l} + C^\star = A_{Q_{max},g,l} + C^\star$ par le théorème 4.3.1. Mais $A_{Q_{max},g,l}$ est compact (c'est une conséquence du lemme 4.2.7) donc $b_{Q,g,l,0,C}(\mu) = \min_{\rho \in Ext(A_{Q_{max},g,l})} \langle \rho | \mu \rangle = \min_{w \in \prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle$.

Supposons maintenant μ b-régulier. On a $Reg \subseteq C$ donc

$$\min_{w \in \prod_{\alpha\in S} \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle = b_{Q,g,l,0,C}(\mu) = b_{Q,g,l,0,Reg}(\mu) = \inf_{z \in B_{Q,g,l,0,Reg}} \langle z | \mu \rangle$$

or $B_{Q,g,l,0,Reg} = A_{Q,g,l} + Reg^\star = A_{Q_{max},g,l} + Reg^\star$ par le théorème 4.3.1 (on a $C^\star \subseteq Reg^\star$). Mais par le lemme 4.4.4 on a $A_{Q_{max},g,l} + Reg^\star = \vec{\rho}_{w_0} + Reg^\star$. Ainsi

$$\inf_{z\in B_{Q,g,l,0,Reg}} \langle z|\mu\rangle = \langle \vec{\rho}_{w_0}|\mu\rangle + \inf_{z\in Reg^\star} \langle z|\mu\rangle = \langle \vec{\rho}_{w_0}|\mu\rangle$$

puisque $\mu \in Reg$. Enfin on vérifie que $\vec{\rho}_{w_0} = \frac{2}{b+1}\vec{\rho}$.

Pour la minoration on souhaite appliquer la proposition 3.3.9 (avec $(\Gamma, f, U) = (R, g, 0)$), dont il faut vérifier les hypothèses. Le lemme 4.4.1 assure que Q possède un point q pour lequel les inégalités définissant Q sont strictes, ainsi Q est d'intérieur non-vide. On en déduit que Q engendre $\mathbb{R}^{S\times I}$ comme espace vectoriel.
Les ensembles $R\cap Ker(g)$ et $Ker(g)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{S\times I}$ puisque R et g sont définis sur $\mathbb{Q}$.
Vérifions que $\mu \in g(R)$. Notons e_j^α la base canonique de $\mathbb{R}^{S\times[\![1,d]\!]}$. Alors pour $\alpha' \in S$ et $s \in [\![1, d]\!]$, l'élément $q = (q_{i,j}^\alpha)$ donné par $q_{i,j}^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \alpha' \text{ et } (i,j) = (s,d) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est évidemment dans R (voir la définition de R dans la sous-section 3.3.1), et un calcul montre que son image par g est $h_s^{\alpha'} = b.e_d^{\alpha'} - e_s^{F^{-1}\circ\alpha'}$. Une inversion des formules donne

$$e_j^\alpha = \frac{1}{b^r-1}\sum_{k=1}^{r} b^k.h_d^{F^{k+1}\circ\alpha} - h_j^{F\circ\alpha}$$

donc dans la base (h_j^α), μ s'écrit

$$\mu = \sum_{\alpha\in S}\frac{1}{b^r-1}\left(\sum_{k=1}^{r} b^k|\mu^{F^{-k-1}\circ\alpha}|\right).h_d^\alpha - \sum_{\alpha,j}\mu_j^\alpha.h_j^{F\circ\alpha}.$$

La condition (N) assure que les coefficients de μ dans la base (h_j^α) sont des entiers. Ainsi on a bien $\mu \in g(R)$. On peut donc appliquer la proposition 3.3.9 : soit K une maille du réseau $R\cap Ker(g)$ de $Ker(g)$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}^{S\times I}$ tel que $x_0 + K$ soit inclus dans Q. On pose $y_0 = (y_{0,j}^\alpha) = g(x_0)$. Alors $b'_{Q,g,l,0,R}(\mu) \geqslant b_{Q,g,l,0}(\mu - g(x_0)) + \inf_{x\in x_0+K} l(x)$.
Mais $b_{Q,g,l,0}$ est lipschitzienne (de constante de Lipschitz inférieure au maximum des normes $\|\rho\|$ où ρ parcourt les points extrémaux de $A_{Q_{max},g,l} + C^\star$) sur $g(Q)$, car elle s'écrit

$$\inf_{z\in A_{Q_{max},g,l}+C^\star}\langle z|\cdot\rangle = \min_{\rho\in Ext(A_{Q_{max},g,l}+C^\star)}\langle\rho|\cdot\rangle$$

sur cet ensemble. Ainsi pour les μ tels que $\mu - g(x_0) \in g(Q)$ on obtient

$$b'_{Q,g,l,0,R}(\mu) \geqslant b_{Q,g,l,0}(\mu) + \inf_{x_0+K} l - \left(\max_{\rho\in Ext(A_{Q_{max},g,l}+C^\star)}\|\rho\|\right).\|g(x_0)\|.$$

La constante c_1 va servir à assurer $\mu \in g(x_0)+g(Q)$: on a $C \subseteq g(Q)$ donc il suffit d'assurer que $\mu \in g(x_0) + C$, *i.e.* que $\mu_j^\alpha - \mu_{j+1}^\alpha \geqslant y_{0,j}^\alpha - y_{0,j+1}^\alpha$. On pose $c_1 = \max_{\alpha\in S, 1\leqslant j\leqslant d-1}(y_{0,j}^\alpha - y_{0,j+1}^\alpha)$. En prenant K contenant 0, on a $x_0 \in Q$, donc $g(x_0) \in C$ et $c_1 \geqslant 0$. □

4.5 Une majoration de la dimension pour les variétés $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$

Lemme 4.5.1. *Soit $y = (y_j^\alpha) \in A_{Q_{min},g,l}$. On suppose que pour tous $\alpha \in S$ et $j \in [\![1, d-1]\!]$, $y_j^\alpha \leqslant y_{j+1}^\alpha + 1$. Alors $y \in A_{Q_{max},g,l}$.*

Démonstration. On utilise les caractérisations de $A_{Q_{max},g,l}$ et $A_{Q_{min},g,l}$ données dans la proposition 4.1.11. Soit $\alpha \in S$ et $T \subseteq [\![1,d]\!]$. On souhaite montrer que $\mathscr{F}_T^\alpha(y) \geqslant 0$. Posons $s = \#T$ et $T = \{t_1 < \cdots < t_s\}$. On a

$$\mathscr{F}_T^\alpha(y) = \sum_{j=1}^s y_j^{F^{-1}\circ\alpha} - b.\sum_{j=1}^s y_{d+1-t_j}^\alpha - s(d-s) + b\left(\sum_{j=1}^s t_j - \frac{s(s+1)}{2}\right)$$

or $y \in A_{Q_{min},g,l}$ donc

$$\mathscr{F}_{[\![1,s]\!]}^\alpha(y) = \sum_{j=1}^s y_j^{F^{-1}\circ\alpha} - b.\sum_{j=1}^s y_{d+1-j}^\alpha - s(d-s) \geqslant 0.$$

On en déduit

$$\sum_{j=1}^s y_j^{F^{-1}\circ\alpha} - b.\sum_{j=1}^s y_{d+1-t_j}^\alpha - s(d-s) \geqslant b.\sum_{j=1}^s (y_{d+1-j}^\alpha - y_{d+1-t_j}^\alpha) \geqslant b.\sum_{j=1}^s (j-t_j)$$

la deuxième inégalité provenant du fait que $t_j \geqslant j$ entraîne $y_{d+1-t_j}^\alpha - y_{d+1-j}^\alpha \leqslant t_j - j$ par l'hypothèse du lemme. On a bien obtenu $\mathscr{F}_T^\alpha(y) \geqslant 0$. □

Théorème 4.5.2. *Soit $\mu = (\mu_j^\alpha) \in (\mathbb{Z}^d)^S$ dominant.*
On suppose $b \geqslant \max(\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor + 1, d+1)$. Alors

$$\dim(\mathcal{X}_{\leqslant\mu}) \leqslant \frac{2}{b+1}\langle\vec{\rho}|\mu\rangle + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}.$$

Démonstration. Le théorème 3.3.10 donne

$$b'_{Q,g,l,C^\star,R}(\mu) - \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2} \leqslant \dim(\mathcal{X}_{\leqslant\mu}) \leqslant b'_{Q,g,l,C^\star,R}(\mu) + \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2}.$$

On a $b'_{Q,g,l,C^\star,R}(\mu) \leqslant b_{Q,g,l,C^\star}(\mu) = \inf_{z \in B_{Q,g,l,C^\star}} \langle z|\mu\rangle$. Il suffit donc de prouver que $\vec{\rho}_{w_0} = \frac{2}{b+1}\vec{\rho} \in B_{Q,g,l,C^\star} = A_{Q,g,l} \cap C$. Il est clair que $\vec{\rho}_{w_0} \in C$. Par le lemme 4.4.4 on sait également que $\vec{\rho}_{w_0} \in A_{Q_{min},g,l}$. Ainsi le lemme 4.5.1 s'applique et $\vec{\rho}_{w_0}$ appartient à $A_{Q_{max},g,l}$ qui est inclus dans $A_{Q,g,l}$. Cela établit la majoration. □

Remarque 4.5.3. Il serait souhaitable d'obtenir une minoration de la dimension des variétés $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}$. Pour cela on sait que

$$b'_{Q,g,l,C^\star,R}(\mu) - \#S \cdot \frac{d(d-1)}{2} \leqslant \dim(\mathcal{X}_{\leqslant\mu})$$

donc il suffit de trouver un élément q de $Q \cap R$ tel que $g(q) \in \mu - C^\star$ et $l(q)$ soit « proche » de $\frac{\langle 2\vec{\rho}|\mu\rangle}{b+1}$ (ou d'un terme similaire). C'est ce qui est fait dans le cas $k = \mathbb{F}_p$, dans [Car]. Dans *op. cit.*, Caruso définit la notion de d-uplet fortement intégralement b-régulier (voir la définition 1), puis il montre que si μ est fortement intégralement b-régulier, on peut construire un q comme au-dessus vérifiant $l(q) \geqslant -(d-1)^2 - \frac{(d-2)^2}{4} + \frac{\langle 2\vec{\rho}|\mu\rangle}{b+1}$. Nous ne savons pas construire un analogue de q en général lorsque k est quelconque, l'action du Frobenius F sur S compliquant les choses.

Bibliographie

[BeD] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*, à paraître, disponible à http ://www.math.uchicago.edu/~mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf.

[Bo1] N. Bourbaki, *Algèbre, Chap. III*, *Éléments de mathématique*, Hermann.

[Bo2] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV,V,VI*, *Éléments de mathématique*, Hermann.

[Br1] C. Breuil, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math., **152** (2000), pp. 489-549.

[Br2] C. Breuil, *Schémas en groupes et corps des normes*, non publié, disponible à http ://www.math.u-psud.fr/∼breuil/publications.html, (1998).

[Car] X. Caruso, *Estimation des dimensions de certaines variétés de Kisin*, J. reine angew. Math., à paraître, DOI 10.1515/crelle-2014-0066.

[CDM] X. Caruso, A. David, A. Mézard, *Un calcul d'anneaux de déformations potentiellement Barsotti-Tate*, prépublication, arXiv :1402.2616v1.

[Con] B. Conrad, *Finite group schemes over bases with low ramification*, Compositio Math., **119** (1999), no. 3, pp. 239-320.

[Fo1] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque 47-48, Soc. Math. de France, (1977).

[Fo2] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques des corps locaux I*, The Grothendieck Festschrift, Vol II, Progr. Math., **87**, Birkhäuser Boston (1990), pp. 249-309.

[GHKR] U. Görtz, T. Haines, R. Kottwitz, D. Reuman, *Dimensions of some affine Deligne-Lusztig varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup., (4) **39** (2006), no. 3, pp. 467-511.

[Gör] U.Görtz, *Affine Springer Fibers and Affine Deligne-Lusztig Varieties*, A. Schmitt (ed.), Proceedings of Affine Flag Manifolds and Principal Bundles (Berlin 2008), Trends in Mathematics, Birkhäuser (2010).

[Grü] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Springer.

[GoW] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I*, Vieweg + Teubner (2010).

[Hel] E. Hellmann, *Connectedness of Kisin varieties for GL_2*, Adv. Math., **228** (2011), no. 1, pp. 219-240.

[Im1] N. Imai, *On the connected components of moduli spaces of finite flat models*, Amer. J. Math., **132** (2010), no. 5, pp. 1189-1204.

[Im2] N. Imai, *Ramification and moduli spaces of finite flat models*, Ann. Inst. Fourier **61** (2011), No 5, pp. 1943-1975.

[Ki1] M. Kisin, *Moduli of finite flat group schemes and modularity*, Ann. of Math. **170** (2009), No 3, pp. 1085-1180.

[Ki2] M. Kisin, *Crystalline representations and F-crystals*, Algebraic geometry and number theory. In honour of Vladimir Drinfeld's 50th birthday, Prog. Math. 253, Birkhäuser (2006), pp. 459-496.

[Ki3] M. Kisin, *Potentially semi-stable deformation rings*, J.A.M.S **21**(**2**) (2008),pp. 513-546.

[Maz] B. Mazur, *Deforming Galois representations*, Galois groups over $\mathbb{Q}$, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **16**, Springer, New York-Berlin (1989), pp. 395-437.

[Mil] J. S. Milne, *Reductive groups*, version 1.00, non publié, disponible à http ://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ala.html, (2012).

[PaR] G. Pappas, M. Rapoport, *Φ-modules and coefficient spaces*, Mosc. Math. J., **9** (2009), pp. 625-663.

[PaS] C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz, *The Max-Flow, Min-Cut Theorem* in *Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity*, Dover (1998), pp. 120-128.

[Ram] R. Ramakrishna, *On a variation of Mazur's deformation functor*, Compositio Math., **87** (1993), pp. 269-286.

[Rap] M. Rapoport, *A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties. Automorphic forms. I*, Astérisque No. 298 (2005), pp. 271-318.

[Rén] A. Rényi, *Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations*, Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont-Ferrand, **8** (1962), pp. 7-13.

[Ric] R. Richardson, *Affine coset spaces of reductive algebraic groups*, Bull. London Math. Soc. **9** (1977), No. 1, pp. 38-41.

[SGA3r] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes*, t. III, édition recomposée et annotée, Documents Mathématiques **8**, S.M.F. (2011).

[Spr] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 9, Birkhaüser Boston (1998).

[Vie] E. Viehmann, *The dimension of some affine Deligne-Lusztig varieties*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., **39** (2006), pp. 513-526.

[Win] J.-P. Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup., (4) **16** no.1 (1983), pp. 59-89.